République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université M'hamed Bougara Boumerdes

Faculté des SCiences

Département des Mathématiques

Les fonctions réelles à variable réelle
Cours

PAR:

GRAZEM Mohamed et TAHAR Souhila

Domaine: Science et technologie (ST)

Première année licence

Année 2022

Table des matières

1 Fonction réelle à variable réelle **1**

1.1 Généralités 1

1.1.1 Notion de fonction 1

1.1.2 Graphe d'une fonction. 3

1.1.3 Opérations sur les fonctions 4

1.1.4 Propriétés générales des fonctions réelles 6

1.1.5 Fonctions inversibles 10

1.2 Limite, continuité d'une fonction 13

1.2.1 Limite finie d'une fonction en un point 13

1.2.2 Limites latérales en un point 16

1.2.3 Limite à l'infini 18

1.2.4 Théorèmes sur les limites 19

1.2.5 Limites infinies 22

1.2.6 Critères d'existence de la limite 24

1.2.7 Limites des fonctions usuelles. Limites remarquables 27

1.2.8 Continuité d'une fonction en un point 29

1.2.9 Continuité à droite. Continuité à gauche 30

1.2.10 Fonctions continues sur un ensemble 30

1.2.11 Discontinuité. Classification des points de discontinuité. 31

1.2.12 Opérations sur les fonctions continues 33

1.2.13 Continuité des fonctions composées 33

1.2.14 Théorèmes relatifs aux fonctions continues. 34

1.2.15 Théorème de la fonction réciproque 35

1.3 Dérivée et différentiabilité d'une fonction 35

1.3.1 Fonctions dérivables. Dérivée en un point 36

1.3.2 Dérivées à droite et à gauche en un point 38
1.3.3 Fonctions dérivables sur un ensemble 39
1.3.4 Opérations sur les dérivées 40
1.3.5 Calcul des dérivées des fonctions usuelles et élémentaires. 43
1.3.6 Dérivées d'ordres supérieurs. 43
1.3.7 Théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables 47
1.3.8 Applications au calcul des limites. 51

Bibliographie **57**

Chapitre 1

Fonction réelle à variable réelle

Sommaire

1.1 Généralités 1

1.1.1 Notion de fonction 1

1.1.2 Graphe d'une fonction. 3

1.1.3 Opérations sur les fonctions 4

1.1.4 Propriétés générales des fonctions réelles 6

1.1.5 Fonctions inversibles 10

1.2 Limite, continuité d'une fonction 13

1.2.1 Limite finie d'une fonction en un point 13

1.2.2 Limites latérales en un point 16

1.2.3 Limite à l'infini 18

1.2.4 Théorèmes sur les limites 19

1.2.5 Limites infinies 22

1.2.6 Critères d'existence de la limite 24

1.2.7 Limites des fonctions usuelles. Limites remarquables 27

1.2.8 Continuité d'une fonction en un point 29

1.2.9 Continuité à droite. Continuité à gauche 30

1.2.10 Fonctions continues sur un ensemble 30

1.2.11 Discontinuité. Classification des points de discontinuité. 31

1.2.12 Opérations sur les fonctions continues 33

1.2.13 Continuité des fonctions composées 33
1.2.14 Théorèmes relatifs aux fonctions continues. 34
1.2.15 Théorème de la fonction réciproque 35
1.3 Dérivée et différentiabilité d'une fonction 35
1.3.1 Fonctions dérivables. Dérivée en un point 36
1.3.2 Dérivées à droite et à gauche en un point 38
1.3.3 Fonctions dérivables sur un ensemble 39
1.3.4 Opérations sur les dérivées 40
1.3.5 Calcul des dérivées des fonctions usuelles et élémentaires. 43
1.3.6 Dérivées d'ordres supérieurs. 43
1.3.7 Théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables 47
1.3.8 Applications au calcul des limites. 51

Dans le monde où nous évoluons beaucoup de phénomènes sont perçus par nos cinq sens, mais aussi par des mesures de grandeurs qu'on rencontre dans la nature. Ces grandeurs sont généralement dépendantes les

unes des autres, chose qu'on peut exprimer par une loi ou une relation.

Par exemple, la pression p, la température t et le volume v d'un gaz sont liés par la loi :

$pv = k_0 t$; où k_0 est une constante caractéristique du gaz.

1.1 Généralités

1.1.1 Notion de fonction

L'étude des fonctions réelles d'une variable réelle est le principal objet du cours de Maths1. Dans ce chapitre, on introduit la notion de fonction réelle ainsi que certaines propriétés générales qu'on approffondira dans les chapitres suivants en plus de nouvelles notions de mathématiques.

Définition 1.1. *On appelle* ***fonction réelle d'une variable réelle*** *définie dans un ensemble* $X \subset R$, $X \neq \emptyset$, *toute opération ou procédé* f *qui à tout élément* $x \in X$, *fait correspondre au plus un élément* $y \in \mathbb{R}$.

On note :

$$\begin{array}{rccl} f: & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

Remarque 1.1. *:*

1) *x est dite **variable indépendante** ou **argument** et y **la variable dépendante** de x.*

2) *Si $x = x_0 \in X$, alors $y_0 = f(x_0)$ est la **valeur prise par la fonction** f **au point** x_0.*

3) *L'ensemble X est appelé **domaine de définition** de la fonction f si pour chaque $x \in X$, il existe un unique $y \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$.et dans ce cas la fonction f est une application.*

Il est clair qu'une application est une fonction, alors qu'une fonction n'est pas toujours une application. voir l'exemple suivant:

Exemple 1. *:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x = t^2 & \mapsto & y = t \end{array}$$

n'est pas une application puisque pour chaque $x \in \mathbb{R}_+^*$, il existe deux images $y = f(x)$.

Définition 1.2. *:Lorsque la variable indépendante x parcourt X , alors la variable y décrit dans $\mathbb{R}$ un ensemble, appelé **ensemble de valeurs de** f ou **ensemble image de** X **par** f, noté $f(X)$ ou Imf . On a:*

$$f(X) = Imf = \{y \in \mathbb{R} \ : \ \exists \, x \in X \ , \ y = f(x)\} \subset \mathbb{R}.$$

Remarque 1.2. *:*

1) *La relation fonctionnelle entre x et y donnée par la formule $y = f(x)$ est dite **fonction explicite** ou **terme général** de la fonction.*

2) *La donnée d'une formule $y = f(x)$ ne suffit pas à définir une fonction. Il est nécessaire d'indiquer le domaine de définition de la fonction.*

Exemple 2. ***1)*** *La formule $y = \sqrt{1 - x^2}$ définit une fonction si et seulement si / $(1 - x^2) \geq 0$, c'est à dire si $X = [-1, 1]$, qu'on note $y = \sqrt{1 - x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$;*

2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $-1 < x < 1$;

3) $y = \dfrac{\sin x}{x}$, $\forall x \neq 0$ *car* $\dfrac{\sin x}{x}$ *n'est pas définie en* $x = 0$.

4) $y = \sqrt{\ln(\sin x)}$ *est définie sur l'ensemble discret suivant:* $\left\{x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.\right\}$.

1.1.2 Graphe d'une fonction.

Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et $Y = f(X)$. Considérons le repère cartésien Oxy.

Définition 1.3. *On appelle **graphe** de la fonction f le lieu géométrique des points $M(x, y)$ tels que $x \in X$ et $y = f(x)$.*

En notant le graphe de f par G_f, on a :

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in X \ , \ y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2, \ x \in X\} \subset X \times Y = X \times f(X).$$

Représentation géométrique

D'après la définition d'une fonction, toute droite parallèle à Oy d'équation $x = x_0, \ x_0 \in X$, coupe le graphe G_f en un seul point $M_0(x_0, y_0)$ où $y_0 = f(x_0)$. De ce fait, le graphe d'une fonction est une ligne (C),

appelée **courbe représentative de la fonction** $y = f(x), \ x \in X$ ou **courbe d'équation** $y = f(x), \ x \in X$.

Inversement, soit G un sous-ensemble de $X \times Y$ où $X, Y \subset \mathbb{R}$. On veut savoir si G peut être le graphe d'une fonction $f \ : X \longrightarrow Y$, c'est à dire $G = G_f$. On démontre que:

$$\forall x \in X \ , \ \exists! \ y \in Y : (x, y) \in G \Longleftrightarrow \exists \ f : X \longrightarrow Y : G = G_f.$$

Remarque 1.3. *Si toute droite parallèle à Ox coupe l'ensemble G en un seul point , alors on peut considérer G comme étant le graphe d'une fonction $x = h(y)$, $y \in Y$.*

Exemple 3. *:1)* $y = ax + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $(a, b \in \mathbb{R})$

*2) Fonction" signature ". On appelle fonction "**signature** " ou "**signe**" , la fonction suivante:*

$$y = sgnx = \begin{cases} +1 & si \ x > 0, \\ 0 & si \ x = 0, \\ -1 & si \ x < 0 \ . \end{cases}$$

3)

$$y = \begin{cases} \sqrt{x} \ si \ x \geq 0, \\ x^2 \quad si \ x \leq 0 \ . \end{cases}$$

Remarque 1.4. *Certaines fonctions peuvent ne pas être représentées géométriquement. Par exemple: la* ***fonction de Dirichlet****, définie par:*

$$y = \begin{cases} 1 \ si \ x \in \mathbb{Q} \ , \\ 0 \ si \ x \notin \mathbb{Q} \ , \end{cases}$$

ne peut être représentée géométriquement à cause de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

1.1.3 Opérations sur les fonctions

Egalité, inégalité

On dit que les fonctions f et g sont **égales** sur un ensemble $X \subset \mathbb{R}$ si elles sont définies sur X et si $f(x) = g(x)$,$\forall x \in X$. On note, dans ce cas: $f = g$ sur X. De même, on définit les inégalités entre f et g sur X par:

$$(i) \qquad f \leq g \ \text{ sur } X \Longleftrightarrow f(x) \leq g(x), \ \forall x \in X \ ;$$

$$(ii) \quad f < g \ \text{ sur } X \Longleftrightarrow f(x) < g(x), \ \forall x \in X \ ;$$

Opérations arithmétiques

Définition 1.4. *Soient $f, g \ : X \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit les opérations suivantes:*
i) *la* ***somme*** *de f et g est la fonction définie sur X par :*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \ , \forall x \in X \ ;$$

ii) *la* ***différence*** *de f et g est la fonction définie sur X par :*

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), \ \forall x \in X \ .$$

iii) *le* ***produit*** *de f et g est la fonction définie sur X par :*

$$(f.g)(x) = f(x).g(x) \ , \ \forall x \in X \ ;$$

iv) *le* ***produit de** f **par le scalaire*** *λ est la fonction définie sur X par :*

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \ \forall x \in X \ ;$$

v) *le* ***rapport*** *de f par g , si $g \neq 0$, est la fonction , définie sur X par :*

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \ , \ \forall x \in X \ , g(x) \neq 0.$$

Composition de fonctions

Soient $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g \ : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(X) \subset Y$. Alors on définit une nouvelle fonction, appelée **fonction composée** de f par g , définie sur X par:

$$(gof)(x) = g\left(f(x)\right), \ \forall x \in X \ .$$

qu'on peut représenter comme suit :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Exemple 4. *1) Soient* $f(x) = x^2$ *et* $g(x) = \sin x, \ \forall x \in \mathbb{R}$. *On a :*

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sin x) = \sin^2 x \quad et \quad g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sin x^2, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

2) La fonction $h(x) = \sqrt{1 - x^3}, \ x \in \left]-\infty, 1\right]$, *est la composition de* f *et* g, $h = gof$, *où* $f(x) = 1 - x^3 = y, \ x \in R, \ g(y) = \sqrt{y}, \ y \geq 0$, *d'où* $h(x) = g(f(x)) = g(1 - x^3) = \sqrt{1 - x^3}, \ x \in \left]-\infty, 1\right]$.

Remarque 1.5. *Comme le montre l'exemple précédent, on a, en général,* $fog \neq gof$.

Restriction. - Prolongements

Définition 1.5. *Soit une fonction* $f : \ X \subset \mathbb{R} \longrightarrow$ *et* $X_1 \subset X$ *.On appelle fonction restriction ou* ***la restriction de*** f ***au sous-ensemble*** X_1 *la fonction* $\widetilde{f}$ *, définie sur* X_1*, telle que:*

$$\widetilde{f}(x) = f(x) \ , \forall x \in X_1,$$

qu'on note, généralement, par: $f_{|X_1}$*, c'est à dire que* $\widetilde{f} = f_{|X_1}$ *sur* X_1.

Définition 1.6. *Soit la fonction* $g : X_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $X_1 \subset X$. *On appelle* ***prolongement de*** g ***à l'ensemble*** X, *toute fonction* f, *définie sur* X, *telle que/*

$$f(x) = g(x), \ \ \forall x \in X_1 \quad c\text{'}est \text{ à dire que } f = gsurX_1.$$

Remarque 1.6. *La fonction* f *admet une seule restriction sur* X_1, *tandis que* g *peut admettre une infinité de prolongement sur* X.

Exemple 5. ***1)*** *Soit* $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. $\widetilde{f}(x) = \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$ *est la restriction de* f *à l'intervalle* $[0, 2\pi]$.
2) *La fonction* $\widetilde{f}(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ *est la restriction de* $f(x) = \sin x$ *sur* $[0, \pi]$. *En effet, dans cet intervalle, on a:*

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}.$$

3) *Les fonctions* $f_1(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \geq 0\ , \\ -x & s\ x \leq 0\ . \end{cases}$ *et* $f_2(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \geq 0\ , \\ e^x - 1 & si\ x \leq 0\ . \end{cases}$ *sont deux prolongements de la fonction* $g(x) = x^2$, $x \in [0, +\infty[$ *à l'ensemble* $\mathbb{R}$.

1.1.4 Propriétés générales des fonctions réelles

Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Etudier la fonction f revient à déterminer l'ensemble de ses valeurs et tracer son graphe. Or il est impossible de le tracer point par point si X est infini . Dans ce cas, on établit les propriétés générales de cette fonction permettant de déterminer son allure ou son comportement dans des intervalles ou au voisinage de certains points remarquables. Ces propriétés concernent la variation , la parité, les intersections avec les axes, la périodicité etc. Dans ce paragraphe, on étudie certaines de ces propriétés.

Parité . Fonctions paires et impaires

Définition 1.7. *On dit qu'un ensemble* $X \subset \mathbb{R}$ *est* ***symétrique*** *(par rapport à zéro) si:*

$$\forall x : (x \in X \Longrightarrow -x \in X).$$

On note , dans ce cas, $X = -X$.

Exemple 6. ***1)*** *Les ensembles* $\mathbb{R}$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$, $]-a, a[$, $[-2, -1] \cup [1, 2]$ *sont symétriques.*
2) *Les ensembles* $\mathbb{N}$, $[-1, 1[$, $\bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi]$ *ne sont pas symétriques.*

Définition 1.8. *Soit* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X = -X$. *On dit que:*
i) f *est* ***paire*** *sur* X *si* $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in X$;
ii) f *est* ***impaire*** *sur* X *si* $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in X$.

Géométriquement, si f est paire, alors son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées Oy , et si f est impaire, alors il est symétrique par rapport à l'origine des axes.

Exemple 7. ***1)*** $y = \sqrt{1 - x^2}$ *est paire sur* $X = [-1, 1]$.
2) $y = x + x^3$ *est impaire sur* $\mathbb{R}$.
3) $y = x^2 + x$ *n'est ni paire , ni impaire.*
4) $y = |x|$ *est paire sur* $\mathbb{R}$.

Périodicité. Fonctions périodiques.

Définition 1.9. *On dit que la fonction* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *est* ***périodique*** *s'il existe un nombre* $\alpha > 0$ *tel que:*
1) $\forall x \in X$, *alors* $x + \alpha \in X$ *et* $x - \alpha \in X$,
2) f *vérifie la propriété suivante, appelée* ***propriété de périodicité*** *:*

$$f(x + \alpha) = f(x) \ , \ \forall x \in X \ .$$

Remarque 1.7. *Si* f *est périodique, vérifiant la propriété* (4) *, alors on a:* $x + k\alpha \in X$ *et*

$$f(x + k\alpha) = f(x) \ , \ \forall x \in X, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

En effet, on a, d'après la propriété (4) *:*

$$f(x - \alpha) = f((x - \alpha) + \alpha) = f(x), \ \forall x \in X.$$

Et alors:

$$f(x + k\alpha) = f((x + (k-1)\alpha) + \alpha) = f(x + (k-1)\alpha) = ... = f(x + \alpha) = f(x) \ , \forall \ k > 0.$$

Définition 1.10. *Soit* f *une fonction périodique . On appelle* ***période*** *de* f *le nombre* $T > 0$, *égal au plus petit des nombres* $\alpha > 0$ *vérifiant la condition de périodicité* (4) :

$$T = \min \{\alpha > 0 : f(x + \alpha) = f(x), \ \forall x \in X\} > 0. \tag{5}$$

D'où: $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in X$.

Remarque 1.8. ***1****) Si* f *est périodique, de période* T, *alors il suffit d'étudier sa restriction sur un intervalle de longueur* T, *de la forme* $[x_0, x_0 + T]$ *où* $x_0 \in \mathbb{R}$ *et choisi convenablement.*
2*) Certains auteurs désignent par période tout nombre* $\alpha > 0$ *vérifiant la condition (4) de périodicité.*

Exemple 8. ***1)*** $y = \sin x$ *et* $y = \cos x$ *sont périodiques, de période égale à* 2π.
2) $y = \tan x$ *et* $y = co\tan x$ *sont périodiques, de période égale à* π.
3) *La fonction de Dirichlet définie par:*

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ si \ x \in \mathbb{Q} \ , \\ 1 \ si \ x \notin \mathbb{Q} \ , \end{cases}$$

est périodique. En effet, pour $\alpha \in \mathbf{Q}_*^+$, on a :

$$f(x+\alpha) = f(x)\ , \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cependant, suivant notre définition de la période, cette fonction n'admet pas de période.

Monotonie. Fonctions monotones

Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et $I \subset X$.

Définition 1.11. *On dit que la fonction f est:*
i) croissante *(resp.* ***décroissante****) sur I si :*
$\forall x, x' \in I : (x < x' \Longrightarrow f(x) \leq f(x'))$ *(resp.* $x < x' \Longrightarrow f(x) \geq f(x')$*);*
ii) strictement croissante *(resp.* ***strictement décroissante****) sur I si :*
$\forall x, x' \in I$:$(x < x' \Longrightarrow f(x) < f(x'))$ *(resp.* $(x < x' \Longrightarrow f(x) > f(x'))$.
iii) monotone *(resp.* ***strictement monotone****) sur I si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur I.*

Exemple 9. ***1)*** *$y = x^2$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et strictement croissante sur $]0, +\infty[$;*
2) *$y = x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; en effet, si $x < x'$, alors:*
i) si $x < 0,\ x' > 0$, on a $x^3 < 0$ et $x'^3 > 0$;
ii) si $xx' > 0$, on a

$$x^3 - x'^3 = (x - x')(x^2 + xx' + x'^2) < 0.$$

3) *La fonction de Dirichlet n'est monotone sur aucun intervalle de $\mathbb{R}$.*

Fonctions bornées. Suprémum et infimum d'une fonction réelle

Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f(X) = Y$.

Définition 1.12. *On dit que :*
i) *f est* ***majorée*** *(resp.* ***minorée****) sur X si l'ensemble image $f(X)$ est majoré (resp. minoré);*
ii) *f est* ***bornée*** *si elle est à la fois majorée et minorée;*
iii) *f* ***n'est pas bornée*** *si l'ensemble $f(X)$ ne l'est pas;*
iv) *f est* ***finie*** *sur X si elle prend une valeur finie en tout point de X.*
Symboliquement:
i) *f majorée (resp. minorée) sur X est équivalente à*

$\exists M \in \mathbb{R}$ (*resp.* $\exists m \in \mathbb{R}$) : $f(x) \leq M$ (*resp.* $m \leq f(x)$) , $\forall x \in X$.
*Les nombres M et m sont appelés respectivement un **majorant** et un **minorant** de f .*
ii) *f bornée sur X* $\overset{déf.}{\Longleftrightarrow} \exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq f \leq M$, $\forall x \in X \Longleftrightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}_*^+ \ ; \ |f(x)| \leq c$, $\forall x \in X$.
iii) *f n'est pas bornée* $\overset{déf.}{\Longleftrightarrow} \forall\, A > 0\,,\ \exists\, x \in X \ : \ |f(x)| > A$.

Définition 1.13. *On appelle la **borne supérieure** (resp. la **borne inférieure)** de f sur X le plus petit des majorants (resp. le plus grand des minorants) de Imf, s'il existe, notée* $\sup\limits_X f = \sup\limits_{x \in X} f(x) = \sup f(X)$ *(resp.* $\inf\limits_X f = \inf\limits_{x\in X} f(x) = \inf\ f(X)$*).*
On note :
i) $\sup\ f\ < +\infty$ *si f est majorée;* $\inf\ f > -\infty$ *si f est minorée* ;
ii) $-\infty < \inf\ f \leq \sup\ f < +\infty$ *si f est bornée;*
iii) $\sup\limits_X |f| = +\infty$ *si f n'est pas bornée.*

Remarque 1.9. *Si f est bornée, alors son graphe est situé dans la bande parallèle à l'axe des abscisses Ox, limitée par les droites $y = \inf\ f$ et $y = \sup\ f$.*

Exemple 10. *Un exemplede fonction non bornée est donné par* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *sur* $]0, a]$ $(a > 0)$.

Maximum et minimum d'une fonction

Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

Définition 1.14. *On dit que la fonction f admet un **maximum** (resp. un **minimum**) au point $x_0 \in X$ si :*

$$f(x) \leq f(x_0) \ \textit{(resp. } f(x) \geq f(x_0)\text{)}\ ,\ \forall x \in X\ .$$

*Dans ces cas, la valeur $y_0 = f(x_0)$ est appelée **valeur maximale** (resp. **minimale)** ou **maximum** (resp. **minimum)** de f sur X, noté*
$y_0 = f(x_0) = \max\limits_X f$ *ou* $y_0 = \max\limits_{x\in X} f(x)$ *ou* $y_0 = \max_{|x=x_0} f$
(resp. $y_0 = \min\limits_X f$ *ou* $y_0 = \min\limits_{x \in X} f(x)$ *ou* $y_0 = \min_{|x=x_0} f$*).*
*Les valeurs maximale et minimale sont dits **extrémums.***

Remarque 1.10. ***1)*** *Une fonction peut atteindre le maximum ou le minimum en plusieurs points de son domaine de définition.*
2) *Il est clair que si une fonction admet un maximum (resp. un minimum) en $x_0 \in X$ alors*

:

a) *f est majorée (resp. minorée) ,*

b) *on a :*

$$y_0 = \max_X f = \sup_X f \quad \textit{(resp. } y_0 = \min_X f = \inf_X f \textit{).}$$

Remarque 1.11. *Le maximum et le minimum d'une fonction, s'ils existent, sont uniques. Cependant une fonction majorée (resp. minorée) peut ne pas admettre un maximum (resp. un minimum).*

Exemple 11. ***1)*** $y = \sin x$ *atteint son maximum* $y_0 = 1$ *et son minimum* $y_1 = -1$ *aux points* $x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ *et* $x_k = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, *respectivement.*

2) $y = \frac{1}{1+x^2}$ *admet un maximum au point* $x = 0$ *et n'admet pas de minimum sur* $\mathbb{R}$*, mais on a* $\sup \frac{1}{1+x^2} = 1 = \max \frac{1}{1+x^2}$ *et* $\inf \frac{1}{1+x^2} = 0$.

3) $y = x^2$, *définie sur* $\mathbb{R}$, *atteint son minimum au point* $x = 0$, *mais elle n'admet de maximum car elle n'est pas bornée sur* $\mathbb{R}$.

1.1.5 Fonctions inversibles

Fonctions injectives, surjectives, bijectives

Soit $f\ : X \longrightarrow Y \subset \mathbb{R}$.

Définition 1.15. *On dit que la fonction f est :*

i) ***injective*** *si* $\forall x, x' \in X\ : (x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')\ )$;

ii) ***surjective*** *si* $\forall y \in Y,\ \exists x \in X : y = f(x)$;

iii) ***bijective*** *si elle est injective et surjective.*

Remarque 1.12. *D'après la définition précédente, il est clair que l'injection, la surjection et la bijection dépendent des ensembles de départ et d'arrivée de la fonction.*

Proposition 1.1. *On a les équivalences suivantes.*

i)

$$\begin{aligned} f \textit{ injective} &\iff (f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x') \\ &\iff \forall y \in Y, \textit{ l'équation } y = f(x) \textit{ admet au plus une solution dans } X; \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} f \text{ surjective} &\iff \forall y \in Y, \text{ l'équation } y = f(x) \text{ admet au moins une solution dans } X; \\ &\iff Y = f(X)\ ; \end{aligned}$$

iii)

$$f \text{ bijective} \iff \forall y \in Y, \text{ l'équation } y = f(x) \text{ admet une et une seule solution dans } X;$$

Preuve. Conséquence immédiate de la définition. ■

Fonctions inversibles. Inverse d'une fonction

Soit $f : X \longrightarrow Y \subset \mathbb{R}$. Alors, d'après la définition d'une fonction: $\forall x \in X, \ \exists! y \in Y :$ $f(x) = y$. Inversement, soit $y \in Y$, alors l'équation $y = f(x)$ admet généralement plusieurs solutions ou même aucune. Cependant s'il existe un seul $x \in X$ tel que $y = f(x)$, c'est à dire que toute droite parallèle à l'axe Ox passant par $y = y_0 \in Y$ coupe le graphe de f en un seul point, alors on peut parler de fonction de Y dans X. On a la définition suivante.

Définition 1.16. *On dit que la fonction $f : X \longrightarrow Y \subset \mathbb{R}$ est **inversible** s'il existe une fonction $g : Y \longrightarrow X$ vérifiant les conditions :*

$$(fog)(y) = y, \ \ \forall y \in Y \ \text{ et } (gof)(x) = x, \ \forall x \in X\ .$$

Remarque 1.13. *Ces conditions peuvent s'écrire comme suit:*

$$fog = id_Y \ \text{ et } gof = id_X$$

où id_Y et id_X sont respectivement les fonction identités dans Y et dans X.

Théorème 1.2. *Si la fonction f est inversible de X sur Y, alors la fonction $g : Y \longrightarrow X$ vérifiant les conditions de la définition, est unique.*

Preuve. Soient $g, h : Y \longrightarrow X$ vérifiant les conditions de la définition1) .Soit $y \in Y$ et $y = f(x), \ x \in X$. On a alors :

$$g(y) = x = (hof)(x) = h(f(x)) = h(y).$$

D'où $g = h$. ■

Définition 1.17. *La fonction $g : Y \longrightarrow X$ de la définition 1) est appelée* ***fonction inverse*** *ou* ***fonction réciproque*** *de $f : X \longrightarrow Y$ et est notée f^{-1} , c'est à dire que:*

$$fof^{-1} = id_Y \ \ et \ \ f^{-1}of = id_X.$$

On a

$$y = f(x), \ x \in X \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y), \ y \in Y.$$

Proposition 1.3. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ inversible.*
1) f^{-1} est inversible et on a: $(f^{-1})^{-1} = f$.
2) Si f est impaire (resp.paire), alors f^{-1} est aussi impaire (resp.paire).
3) Si f est strictement monotone, alors f^{-1} l'est aussi.
4) Si $g : Y \longrightarrow Z$ est inversible, alors gof est inversible et on a $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$.
exercice à faire par l'étudiant: montrer les résultats de la proposition.

Problème 1. *1) On a, pour tout $x \in X$:*

$$(f^{-1})^{-1}(x) = (f^{-1})^{-1}(f^{-1}(y)) = y = f(x).$$

2) Soit $y = f^{-1}(x) \Longleftrightarrow x = f(y) = -f(-y)$, alors

$$f^{-1}(-x) = f^{-1}(-f(y)) = f^{-1}(f(-y)) = -y = -f^{-1}(x).$$

3) Supposons f strictement croissante. Soit $x, x' \in Y$ et $x < x'$. Posons $y = f^{-1}(x)$, $y' = f^{-1}(x')$. Supposons que $y \geq y'$. Comme est strictement croissante, alors on a $x = f(y) \geq f(y') = x'$. Ceci contredit l'hypothèse $x < x'$.
4) Soit $z \in Z$. Alors il existe $y \in Y$, unique, tel que $z = g(y)$. De même il existe $x \in X$, unique tel que $y = f(x)$, c'est à dire $z = g(y) = g(f(x)) = (gof)(x)$. En plus, on a :

$$(f^{-1}og^{-1})o(gof) = f^{-1}(g^{-1}og)of = f^{-1}o\ id_Y\ of = f^{-1}of = id_{X.}$$

De même, on obtient que

$$(gof)o(f^{-1}og^{-1}) = go(fof^{-1})og^{-1} = go\ id_Y\ og^{-1} = gog^{-1} = id_{Z.}$$

Graphe d'une fonction inverse

Soit $G_{f^{-1}} = \{(x, f^{-1}(x)) \ , \ x \in X\}$ le graphe d'une fonction inversible f dans le repère cartésien Oxy. Dans ce cas, d'après les conditions de la définition 1, on a

$$(x, y) \in G_{f^{-1}} \Longleftrightarrow y = f^{-1}(x), \ x \in X \Longleftrightarrow x = f(y), \ y \in Y \Longleftrightarrow (y, x) \in G_f,$$

c'est à dire que le graphe de la fonction inverse f^{-1} est symétrique au graphe G_f par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$. On a:

$$G_{f^{-1}} = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \in X,\ y = f^{-1}(x)\right\} = \left\{(x, f^{-1}(x)),\ x \in X\right\} = \{(f(y), y) : y \in Y\}.$$

Exemple 12. *1) La fonction $y = x^3$ est inversible de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et son inverse est la fonction $y = \sqrt[3]{x}$ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.*
2) $y = x^2$ est inversible de $]-\infty, 0]$ sur $[0, +\infty[$ et de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$ et leurs inverses sont respectivement $y = -\sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty[$ et $y = \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty[$.

1.2 Limite, continuité d'une fonction

1.2.1 Limite finie d'une fonction en un point

Avant d'aborder la notion de limite d'une fonction à variable réelle, il est nécessaire de définit la notion de voisinage d'un point

Définition 1.18. *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On appelle **voisinage** du point x_0 le sous-ensemble V de $\mathbb{R}$, contenant un intervalle ouvert I tel que $x_0 \in I$.*

$$V \subset \mathbb{R},\ \ V : \textit{voisinage de } x_0 \Longleftrightarrow \exists \delta > 0,\ ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset V.$$

*L'intervalle ouvert centré $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ est appelé $\delta-$**voisinage** de x_0. L'ensemble des voisinages du point x_0 est noté $\mathbb{V}(x_0)$.*

Remarque 1.14. *Il est clair que tout intervalle ouvert I est voisinage de chacun de ses points.*

Pour étudier la limite d'une fonction en un point $x_0 \in \mathbb{R}$, il peut arriver qu'elle ne soit pas définie en ce point mais il est nécessaire qu'elle le soit au moins dans un voisinage de ce point, sauf peut être en ce point, dans ce cas tout voisinage du point x_0 auquel on a enlevé ce point est dit " **voisinage pointé**" de x_0. C'est à dire que l'ensemble V est un voisinage pointé de x_0 si $V \cup \{x_0\}$ est un voisinage de x_0. Pour l'étude des limites en un point, on adoptera dans la suite la notation suivante: $x \longrightarrow x_0$ pour dire que la variable x tend indéfiniment vers x_0 sans jamais l'atteindre.

Soit, donc, $y = f(x)$, une fonction définie dans un voisinage pointé V du point $x_0 \in \mathbb{R}$.

Définition 1.19. (à l'aide des "$\varepsilon - \delta$") *On dit que le nombre $\ell \in \mathbb{R}$ est **la limite** de la fonction f quand x tend vers x_0, si la propriété suivante est vérifiée:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x \in V : (0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon). \qquad (1)$$

Terminologie. *On dit aussi, dans ce cas, que la fonction f **converge** ou **tend** vers le nombre $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0 ou $x \longrightarrow x_0$. On note la limite par:*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell \quad ou \;\; f(x) \underset{x \longrightarrow x_0}{\longrightarrow} \ell$$

Remarque 1.15.
1) *δ_ϵ signifie que δ dépend de ε : $\delta_\epsilon = \delta(\varepsilon)$. En fait $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$.*
2) *L'expression $0 < |x - x_0| < \delta_\epsilon$ est équivalente à $x \in U =]x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon[- \{x_0\}$, c'est à dire que x appartient au δ_ε-voisinage pointé de x_0. De même, $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ est équivalente à $f(x) \in W =]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$, c'est à dire que $f(x)$ appartient au $\epsilon-$voisinage de ℓ. Avec ces notations, la relation $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$ est donc équivalente à $f(U) \subset W$.*

Cela donne la définition suivante:

Définition 1.20. (à l'aide de voisinage) $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell$ *si et seulement si, pour tout voisinage W du point ℓ, il existe un voisinage pointé U de x_0 tel que $f(U) \subset W$.*
Symboliquement:

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \forall W \in \mathbb{V}(\ell),\ \exists V \in \mathbb{V}(x_0) : f(V - \{x_0\}) \subset W \qquad (2)$$

Définition 1.21. (à l'aide des suites) *On dit que le nombre $\ell \in R$ est l**a limite de la fonction** f quand $x \longrightarrow x_0$, si pour toute suite numérique $(x_n) \subset V$ convergente vers x_0, alors la suite $(y_n) = (f(x_n))$ converge vers ℓ quand $n \longrightarrow +\infty$.*
Symboliquement:

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell \;\; &\Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \;\; \forall (x_n) \subset V : (\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell) \end{aligned}$$

Définition 1.22.
1) *D'après la définition précédente, s'il existe deux suites (x_n), (x'_n) dans V telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \lim\limits_{n \to +\infty} x'_n = x_0$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n \to +\infty} f(x'_n)$ ou si l'une des suites $(f(x_n))$ et $(f(x'_n))$ n'existe pas, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x)$ n'existe pas.*

2) La définition 1) est de Cauchy, tandis que la définition 3) est de Heine.
3) Dans le cas où f est définie en x_0, il ne faut pas confondre la limite ℓ avec la valeur $f(x_0)$, car on peut avoir $f(x_0) \neq \ell$.

Théorème 1.4. *Les deux définitions Cauchy et Heine sont équivalentes.*

Preuve. Supposons que $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell$ au sens de la définition 1 et soit (x_n) une suite de V convergente vers x_0. Montrons que $\lim\limits_{n} f(x_n) = \ell$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$. Pour ce δ_ε appliquons la définition de la limite de la suite (x_n). Il existe, donc, $n_{\delta_\varepsilon} \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > n_{\delta_\varepsilon}$, on a $|x_n - x_0| < \delta_\varepsilon$ et, alors on obtient, pour tout $n > n_{\delta_\epsilon}$: $|f(x_n) - \ell| < \epsilon$. Ce qui signifie que $\lim\limits_{n} f(x_n) = \ell$.
Inversement supposons que $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell$ au sens de la définition 3 et démontrons cette limite au sens de la définition 1. On démontre cela par l'absurde. Supposons que cette dernière proposition est fausse. Alors:

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x : (0 < |x - x_0| < \delta\ \wedge\ |f(x) - \ell| \geq \varepsilon).$$

Comme les δ sont arbitraires, choisissons parmi ceux-ci une suite $\delta_n > 0$, $n = 1, 2, ...$, convergente vers 0. Pour chaque δ_n, ainsi choisi, il existe $x = x_n$ tel que l'on ait :

$$|x_n - x_0| < \delta_n\ \wedge\ |f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon.$$

Ainsi, on a obtenu une suite (x_n) telle que $|x_n - x_0| < \delta_n$ et $\delta_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0$ *et* $|f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon$.
Ce qui contredit la définition de Heine. ■

Exemple 13.
1) Montrons que $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \sin x = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour trouver δ_ε, on utilise l'inégalité suivante:

$$|\sin x - 0| = |\sin x| \leq |x|\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}\ .$$

D'après cette inégalité, il est clair que pour tout $\delta_\epsilon < \epsilon$, on obtient :

$$|x| < \delta_\epsilon \Longrightarrow |\sin x| < \varepsilon\ .$$

2) La fonction $y = |sgnx|$ est définie sur $V = \mathbb{R}$. On a:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} |sgnx| = \lim_{x \longrightarrow 0} 1 = 1,$$

alors que $sgn 0 = 0$.

3) *La fonction* $y = f(x) = \sin\dfrac{\pi}{x}$ *n'a pas de limite quand* $x \longrightarrow 0$. *Pour cela, montrons que la propriété de la définition 2 n'est pas vérifiée. En effet, soient les suites* (x_n) *et* (x'_n) *définies par:*

$$x_n = \frac{1}{n} \ \ et \ \ x'_n = \frac{1}{\dfrac{1}{2} + 2n}\ , \ n = 1, 2, \ ...$$

On a alors: $\lim\limits_n x_n = \lim\limits_n x'_n = 0$ *et*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \sin(n\pi) = 0, \ \lim_{n\to+\infty} f(x'_n) = \lim_{n\to+\infty} \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1.$$

Ce qui contredit la définition de Heine.

1.2.2 Limites latérales en un point

Dans la définition de Cauchy de la limite en un point, la fonction est supposée définie à droite et à gauche de ce point. Or souvent, on a besoin d'étudier une fonction aux bords des intervalles de son domaine de définition . Dans ces cas, il est nécessaire d'introduire la notion de limite à droite et de limite à gauche d'une fonction en un point.

Soit $y = f(x)$ une fonction définie sur un ensemble V contenant un intervalle de la forme $]x_0, a[$ $(a > x_0)$ (resp. $]b, x_0[$ $(b < x_0)$. Dans la suite, on adoptera les notations suivantes: $x \longrightarrow x_0 + 0$ ou $x \longrightarrow x_{0+}$ ou $x \underset{x>x_0}{\longrightarrow} x_0$ pour dire que x tend vers x_0 à droite ou par valeurs supérieures et $x \longrightarrow x_0 - 0$ ou $x \longrightarrow x_{0-}$ ou $x \underset{x<x_0}{\longrightarrow} x_0$ pour dire que x tend vers x_0 à gauche ou par valeurs inférieures.

Définition 1.23. *On dit que le nombre* $\ell \in \mathbb{R}$ *est la* ***limite à droite*** *(resp. la* ***limite à gauche)*** *de la fonction* f *quand* $x \longrightarrow x_{0+}$ *(resp.*$x \longrightarrow x_{0_-}$*) si la propriété suivante est vérifiée:*

$$\begin{array}{c} \forall \epsilon > 0, \ \exists \delta_\epsilon > 0, \ \forall x \in V : (x_0 < x < x_0 + \delta_\epsilon \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon. \\ (resp. \ \forall \epsilon > 0, \ \exists \delta_\epsilon > 0, \ \forall x \in V : (x_0 - \delta_\epsilon < x < x_0 \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon)\,). \end{array} \tag{3}$$

On note ces limites par:

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x\longrightarrow x_0+0} f(x) = \ell \ \ ou \ \lim_{x\longrightarrow x_{0_+}} f(x) = \ell \ \ ou \ \lim_{\substack{x\longrightarrow x_0 \\ x>x_0}} f(x) = \ell.$$
$$(resp. \ f(x_0 - 0) = \lim_{x\longrightarrow x_0-0} f(x) = \ell \ \ ou \ \lim_{x\longrightarrow x_{0-}} f(x) = \ell \ ou \ \lim_{\substack{x\longrightarrow x_0 \\ x<x_0}} f(x) = \ell).$$

De même que pour les limites tout court, on a la définition équivalente suivante:

Définition 1.24. *On dit que le nombre $\ell \in \mathbb{R}$ est la* ***limite à droite*** *(resp. la* ***limite à gauche****) de f quand $x \longrightarrow x_0 + 0$ (resp. $x \longrightarrow x_0 - 0$) si on a:*

$$\begin{array}{c} \forall (x_n) \subset V,\ x_n > x_0,\ n = 1, 2, ... : (\lim_n x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_n f(x_n) = \ell\ . \\ (resp.\ \forall (x_n) \subset V,\ x_n < x_0,\ n = 1, 2, ... : (\lim_n x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_n f(x_n) = \ell) \end{array} \qquad (4)$$

Théorème 1.5. *Le nombre $\ell \in \mathbb{R}$ est la limite de la fonction $y = f(x)$, définie dans un voisinage pointé de x_0 si et seulement si les limies à droite et à gauche de f en x_0 sont égales à ℓ :*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \left(\lim_{x \longrightarrow x_{0+}} f(x) = \lim_{x \longrightarrow x_{0-}} f(x) = \ell \right). \qquad (5)$$

Preuve. Elle découle des relations:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Longleftrightarrow (x_0 - \delta < x < x \ \vee \ x_0 < x < x_0 + \delta).$$

■

Exemple 14.

1) Soit la fonction:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \geq 0\ , \\ -x & si\ x \leq 0\ . \end{cases}$$

On a alors:

$$\lim_{x \longrightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} x^2 = 0 \quad et \quad \lim_{x \longrightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} (-x) = 0,$$

d'où: $\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = 0$.

2) Montrons que $\lim_{x \longrightarrow 0\ 0} sgnx = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ *n'existe pas. En effet, par définition de $y = sgnx$, on a:*

$$\lim_{x \longrightarrow 0+0} sgnx = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0+0} 1 = 1$$

et

$$\lim_{x \longrightarrow 0-0} sgnx = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{-x}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0-0} (-1) = -1.$$

D'où, d'après le théorème précédent, $\lim_{x \longrightarrow 0} sgnx$ *n'existe pas.*

1.2.3 Limite à l'infini

Rappelons qu'un voisinage de l'infini est un sous-ensemble $V \subset \mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert de la forme $]a, +\infty[$ ou $]-\infty, a[$ $(a \in \mathbb{R})$

Symboliquement:

$$V : \text{voisinage de } +\infty \Longleftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} : \ ]a, +\infty[\subset V;$$

$$V : \text{voisinage de } -\infty \Longleftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} : \ ]-\infty, a[\subset V.$$

On notera l'ensemble des voisinages de l'infini par $\mathbb{V}(\infty)$.

Exemple 15.
1) *Tout intervalle ouvert non borné est un voisinage de l'infini.*
2) *Les ensembles* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ *et* $\mathbb{Q}$ *ne sont pas des voisinages de l'"infini.*
3) $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ *est un voisinage de* x, $\forall x \in \mathbb{R}$. *De même,* $\mathbb{R}$ *est un voisinage de* $\pm\infty$.

Notation

Soit $y = f(x)$ une fonction définie sur un voisinage V de l'infini. Dans ce point, on définit la limite d'une fonction quand la variable tend vers l'infini.

On adoptera les notations suivantes:

1) $x \longrightarrow +\infty$ pour dire que x croît indéfiniment vers $+\infty$, c'est à dire que pour tout $A > 0$, il existe $x > A$,

2) $x \longrightarrow -\infty$ pour dire que x décroît indéfinimentend vers $-\infty$, c'est à dire que pour tout $A > 0$, il existe $x < -A$ et 3) $x \longrightarrow \pm\infty$ ou $x \longrightarrow \infty$ pour dire que x tens vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Définition 1.25. *On dit que le nombre* $\ell \in \mathbb{R}$ *est* ***la limite de la fonction*** f :
i) *quand* $x \longrightarrow +\infty$ *si:*

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists A > 0, \ \forall x \in V \ : \ (x > A \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon) \ ; \qquad (6)$$

ii) *quand* $x \longrightarrow -\infty$ *si :*

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists A > 0, \ \forall x \in V : (x < -A \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon \ ); \qquad (7)$$

iii) *quand* $x \longrightarrow \infty$ *si:*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in V : (|x| > A \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon). \qquad (8)$$

On note successivement ces limites par:

i) $f(+\infty) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell$ *ou* $f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \ell$ *ou* $f(x) \longrightarrow \ell\ (x \to +\infty)$;

ii) $f(-\infty) = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \ell$ *ou* $f(x) \underset{x \longrightarrow -\infty}{\longrightarrow} \ell$ *ou* $f(x) \longrightarrow \ell\ (x \to -\infty)$;

iii) $f(\infty) = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \ell$ *ou* $f(x) \underset{x \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \ell$ *ou* $f(x) \longrightarrow \ell\ (x \to \infty)$.

On a la définition suivante équivalente à la définition précédente.

Définition 1.26.

i)

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell \overset{déf.}{\Longleftrightarrow} \forall (x_n) \subset V : (\lim_n x_n = +\infty \Longrightarrow \lim_n f(x_n) = \ell); \qquad (9)$$

ii)

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \ell \overset{déf.}{\Longleftrightarrow} \forall (x_n) \subset V : (\lim_n x_n = -\infty \Longrightarrow \lim_n f(x_n) = \ell); \qquad (10)$$

iii)

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \ell \overset{déf.}{\Longleftrightarrow} \forall (x_n) \subset V : (\lim_n x_n = \infty \Longrightarrow \lim_n f(x_n) = \ell). \qquad (11)$$

Exemple 16.

1) $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{1}{x} = 0$. *En effet, soit* $\epsilon > 0$. *Si on choisit* $A > \dfrac{1}{\epsilon}$, *alors on aura:*

$$\forall x : |x| > A \Longrightarrow \left|\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{A} < \epsilon\ .$$

2) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{\sqrt{\sin x}}{x}$ *n'existe pas, car* $\sin x$ *prend des valeurs positives et négatives au voisinage de l'infini.*

3) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} arctgx = \dfrac{\pi}{2}$. *En effet, soit* $\epsilon > 0$. *D' après l'inégalité:*

$$\left| arctgx - \frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi}{2} - arctgx < \epsilon \Longleftrightarrow arctgx > \frac{\pi}{2} - \epsilon \Longleftrightarrow x > tg\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right).$$

Il suffit, donc, de prendre $A > tg(\dfrac{\pi}{2} - \epsilon)$.

1.2.4 Théorèmes sur les limites

Les résultats suivants sont analogues à ceux des suites numériques (chapitre II), et ce grâce à la définition 3 du point 4, §2. Pour cela, nous donnons les démonstrations que pour les autres résultats.

Unicité de la limite

Théorème 1.6. *La limite d'une fonction, si elle existe, est unique.*

Preuve. Démonstration . On peut faire une démonstration analogue à celle de l'unicité de la limite d'une suite numérique en vertu de la définition 3) du point 1 (voir théorème 1 du point 17, §4, chapitre II).
Cependant, on donne une autre démonstration basée sur la définition 2) du point 1, c'est à dire de manière topologoque. Supposons $\ell_1 \neq \ell_2$ et posons $\epsilon = \dfrac{|\ell_1 - \ell_2|}{3}$, $W_1 =]\ell_1 - \epsilon, \ell_1 + \epsilon[$, $W_2 =]\ell_2 - \epsilon, \ell_2 + \epsilon[$. D'après la définition 2) du point 1, il existe un voisinage pointé V_1 de x_0 tel que $f(V_1) \subset W_1$ et un voisinage pointé V_2 de x_0 tel que $f(V_2) \subset W_2$. Soit $V = V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Il est clair que V est un voisinage pointé de x_0 et $V \subset V_1$, $V \subset V_2$, donc on devrait avoir $f(V) \subset W_1$ et $f(V) \subset W_2$ c'est à dire que $f(V) \subset W_1 \cap W_2$. Or ceci est impossible, car $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Donc $\ell_1 = \ell_2$. ■

Propriété locale

Théorème 1.7. *Si* $\lim f(x)$ *existe quand* $x \longrightarrow x_0$ *(ou* $x \longrightarrow \infty$*), alors la fonction* f *est bornée au voisinage de* x_0 *(ou de l'infini).*

Preuve. Soit $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell$. Pour $\epsilon > 0$, $\exists \delta_\epsilon > 0$ tel que $|f(x) - \ell| < \epsilon$, $\forall x \in]x_0 - \delta_\epsilon, x_0 + \delta_\epsilon[$. Ce qui est équivalent à:

$$\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon \text{ si } x \in]x_0 - \delta_\epsilon, x_0 + \delta_\epsilon[.$$

C'est à dire que f est bornée dans le $\delta-$voisinage de x_0. La démonstration est analogue dans le cas où $x \longrightarrow \infty$. ■

Remarque 1.16. *On a vu que si une suite numérique* (x_n) *converge, alors elle est bornée, c'est à dire que tous les termes de cette suite sont majorés dans leur ensemble en valeur absolue, tandis que pour une fonction à variable continue, cette propriété est locale, c'est à dire que la fonction est bornée dans un certain voisinage de* x_0 *et non pas dans tout son domaine de définition.*

Passage à la limite dans les inégalités

Comme pour les suites, on a les théorèmes suivants concernant le passage à la limite dans les inégalités.

Théorème 1.8. *Soit f et g deux fonctions définies sur un voisinage pointé de x_0 ou de l'infini telles que* $\lim f(x) = \ell_1$, $\lim g(x) = \ell_2$ *quand $x \longrightarrow x_0$ ou $x \longrightarrow \infty$ et $\ell_1 < \ell_2$, alors il existe un voisinage V ,pointé de x_0 ou de l'infini, tel que $f(x) < g(x)$.*

Preuve. Elle est analogue à celle des suites (voir théorème 3 du point 20, §4, chap. II). Supposons $\ell_1 \neq \ell_2$ et posons $\epsilon = \dfrac{|\ell_1 - \ell_2|}{3}$, $W_1 =]\ell_1 - \epsilon, \ell_1 + \epsilon[$, $W_2 =]\ell_2 - \epsilon, \ell_2 + \epsilon[$. D'après la définition 2) du point 1, il existe un voisinage pointé V_1 de x_0 tel que $f(V_1) \subset W_1$ et un voisinage pointé V_2 de x_0 tel que $f(V_2) \subset W_2$. Soit $V = V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Il est clair que V est un voisinage pointé de x_0 et $V \subset V_1$, $V \subset V_2$, donc on devrait avoir $f(V) \subset W_1$ et $f(V) \subset W_2$ c'est à dire que $f(V) \subset W_1 \cap W_2$. Or ceci est impossible, car $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Donc $\ell_1 = \ell_2$.
Soit ℓ un nombre tel que $\ell_1 < \ell < \ell_2$. D'après la définition 2) de la limite (voir le point 1), en l'appliquant respectivement aux $(\ell - \ell_1)-$à il existe un voisinage pointé V_1 de x_0, pour ■

Corollaire 1.1. *Si $m \leq f(x) \leq M$ dans un voisinage de x_0 ou de l'infini et si* $\lim f(x) = \ell$ *quand $x \longrightarrow x_0$ ou $x \longrightarrow \infty$, alors*

$$m \leq \ell \leq M \; . \tag{12}$$

Corollaire 1.2. *Si $f(x) > 0$ (resp. $f(x) < 0$) dans un voisinage de x_0 ou de l'infini et si* $\lim f(x) = \ell$ *quand $x \longrightarrow x_0$ ou $x \longrightarrow \infty$, alors*

$$\ell \geq 0 \;\; (resp. \;\ell \leq 0) \; . \tag{13}$$

Théorème 1.9. *Si* $\lim f(x) = \ell$ *quand $x \longrightarrow x_0$ ou $x \longrightarrow \infty$, tel que $\ell > a$ (resp. $\ell < b$) , alors il existe un voisinage V de x_0 ou de l'infini tel que $f(x) > a$ (resp. $f(x) < b$) , $\forall x \in V$, $x \neq x_0$.*

Preuve. Elle est analogue à celle des suites (voir théorème 2 du point 20, §4, chap. II).
■

Corollaire 1.3. *Si* $\lim f(x) = \ell$ $(\ell \neq 0)$ *quand $x \longrightarrow x_0$ ou $x \longrightarrow \infty$, alors il existe un voisinage V de x_0 ou de l'infini tel que*

$$|f(x)| > \frac{|\ell|}{2}, \; \forall x \in V, \; x \neq x_0. \tag{14}$$

Si $\ell > 0$, alors: $f(x) > \dfrac{\ell}{2} > 0$ et si $\ell < 0$, alors: $f(x) < \dfrac{\ell}{2} < 0$, $\forall x \in V$, $x \neq x_0$.

Preuve. Application du théorème 2) pour $a = \dfrac{|\ell|}{2}$. ■

Opérations sur les limites

Comme pour les limites de suites, on peut faire des opérations arithmétiques sur les limites de fonctions.

Théorème 1.10. *Soient* f *et* g *deux fonctions définies au voisinage de* x_0 *, sauf peut être en* x_0 *ou au voisinage de l'infini telles que* $\lim f(x) = \ell$ *et* $\lim g(x) = \ell'$ *quand* $x \longrightarrow x_0$ *ou* $x \longrightarrow \infty$ *, alors :*

$$\textbf{i)}\quad \lim\left(f(x) \pm g(x)\right) = \ell \pm \ell' \tag{15}$$

$$\textbf{ii)}\quad \lim\left(f(x).g(x)\right) = \ell.\ell'; \tag{16}$$

$$\textbf{iii)}\quad \lim\left(\lambda.f(x)\right) = \lambda.\ell \ \ (\lambda \in \mathbb{R}) ; \tag{17}$$

$$\textbf{iv)}\quad \lim\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\ell}{\ell'} \quad si \quad g(x) \neq 0,\ \ell' \neq 0; \tag{18}$$

$$\textbf{v)}\quad \lim|f(x)| = |\ell| . \tag{19}$$

Preuve. Elle est analogue à celle des opérations sur les limites de suites. Voir point 21, §5, chapitre II. ■

Exemple 17.
1)

$$\begin{aligned} \textbf{1)} \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}{x^6} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})x^2(1+\frac{2}{x})^2x^3(1+\frac{3}{x})^3}{x^6} \\ &= \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right)^2\left(1+\frac{3}{x}\right)^3 = (1+0)(1+0)(1+0) = 1 \end{aligned}$$

2) On a $\lim\limits_{x\to\infty}(\cos^2 x + \sin^2 x) = 1$ *, mais* $\lim\limits_{x\to\infty} \cos^2 x$ *et* $\lim\limits_{x\to\infty} \sin^2 x$ *n'existent pas.*

1.2.5 Limites infinies

Soit $y = f(x)$ une fonction définie dans un voisinage V pointé de x_0 ou de l'infini.

Définition 1.27. *On dit que la fonction* $y = f(x)$ *tend vers* $+\infty$ *(resp. vers* $-\infty$ *) quand* $x \to x_0$ *si :*

$$\begin{aligned} \forall A > 0, \exists \delta_A > 0, \forall x \in V : (0 < |x - x_0| < \delta_\epsilon \Rightarrow\ f(x) > A\ ) \\ (\textit{resp.}\ (0 < |x - x_0| < \delta_\epsilon \Rightarrow f(x) < -A)). \end{aligned}$$

On note dans ce cas:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty.\ (\textit{resp.}\ \ \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty\ ).$$

Remarque 1.17. *Dans le cas où f tend $\pm\infty$, on note* $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$, *c'est à dire:*

$$\forall A>0,\ \exists\delta_A>0,\ \forall x\in V:(0<|x-x_0|<\delta_A \Longrightarrow |f(x)|>A)\,.$$

De la même manière, on définit:

i) $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=+\infty$ (*resp.* $-\infty$)$\overset{déf.}{\Longleftrightarrow}$

$$\forall A>0,\ \exists\ \delta_\epsilon>0, \forall x\in V:(x_0<x<x_0+\delta_\epsilon \Longrightarrow f(x)>A\ (\textit{resp. } f(x)<-A)\ ).$$

ii) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=+\infty$ (*resp.* $-\infty$) $\overset{déf.}{\Longleftrightarrow}$

$$\forall A>0,\ \exists\delta_\epsilon>0\ ,\forall x\in V:(x_0-\delta_\epsilon<x<x_0 \Longrightarrow f(x)>A\ (\textit{resp. } f(x)<-A)).$$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (*resp.* $-\infty$) $\overset{déf.}{\Longleftrightarrow}$

$$\forall A>0,\ \exists\ \Delta_A>0\ ,\forall x\in V:(x>\Delta_A \Longrightarrow f(x)>A)\ (\textit{resp. } f(x)<-A)).$$

iv) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ (*resp.* $-\infty$) $\overset{déf.}{\Longleftrightarrow}$

$$\forall A>0,\ \exists\Delta_A>0,\ \forall x\in V:(x<-\Delta_A \Longrightarrow f(x)>A\ \ (\textit{resp. } f(x)<-A)).$$

Les figures suivantes représentent les différents cas de limites infinies.

Par la suite, pour plus de commodité dans le langage, on dira qu'une fonction f est **infiniment grande ou est un infiniment grand** quand $x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$. De même, on dira qu'une fonction f est **infiniment petite ou est un infiniment petit** quand $x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

Théorème 1.11. ***i)*** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell\neq 0 \Longleftrightarrow \alpha(x)=f(x)-\ell$ *est un infiniment petit* $(x\to x_0)\Longleftrightarrow f(x)=\ell+\alpha(x),\ \lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.
ii) *La somme et le produit d'un nombre fini d'infiniment petits est un infiniment petit.*
iii) *Le produit d'une fonction infiniment petite par une fonction bornée est une fonction infiniment petite.*
iv) *Si f est infiniment petite (resp. infiniment grande) $(x\longrightarrow x_0)$ et si $f(x)\neq 0$ dans un voisinage de x_0, alors la fonction $\dfrac{1}{f}$ est infiniment grande (resp. infiniment petite)* $(x\to x_0)$.

Preuve. i) On a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell\neq 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-\ell)=0$.
ii) C'est une conséquence des relations 15) et 16) des propriétés i) et ii) du théorème sur les opérations sur les limites.

iii) Soit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ et h une fonction bornée sur un voisinage W_0 de x_0, c'est à dire : $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tel que $|h(x)| \leq M$, $\forall x \in W_0$. Montrons que le produit $f.h$ est un infiniment petit dans le cas $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit, donc, $\epsilon > 0$. Posons $\epsilon' = \dfrac{\epsilon}{M} > 0$. D'après la définition de la limite, $\exists \delta > 0$ tel que $(0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x)| < \epsilon')$. Dans ces conditions, si $0 < |x - x_0| < \delta$ et $x \in W_0$, on a :

$$|f(x).h(x)| \leq \epsilon'.M = \epsilon.$$

Ce qui signifie que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)h(x) = 0$. La démonstration est analogue dans les autres cas.
iv) La démonstration est analogue à celle des suites infiniment petites et infiniment grandes.
■

Exemple 18. *1)* $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$. *En effet, on a :* $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$ *et* $|\sin x| \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$. *D'où le résultat, d'après la propriété iii).*
2) $x \sin x$ *est non bornée, mais elle n'est pas infiniment grande.*

Remarque 1.18. *Les opérations sur les infiniment petits et infiniment grands peuvent mener à des formes indéterminées telles que:* $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, ∞^0, $\infty - \infty$, $0.\infty$, 0^0, 1^∞.

1.2.6 Critères d'existence de la limite

Comme pour les limites d'une suite numérique, il existe des critères analogues permettant d'affirmer si une fonction possède une limite en un point ou à l'infini. Nous citerons ces critères sans démonstration, car celles-ci sont analogues à celles des suites en vertu de la définition de la limite d'une fonction à l'aide des suites

Critère de la fonction intermédiaire

Ce critère est analogue à celui des trois suites.

Théorème 1.12. *Soient* f, g, h *trois fonctions définies dans un voisinage* V *pointé de* x_0 *ou de l'infini telles que:*
1) $g(x) \leq f(x) \leq h(x),\ \forall x \in V$;
2) $\lim g(x) = \lim h(x) = \ell \in \mathbb{R}$ $(x \to x_0$ *ou* $x \to \infty)$,
alors $\lim f(x) = \ell$ $(x \to x_0$ *ou* $x \to \infty)$.

Preuve. Elle est analogue à celle du théorème des trois suites (voir le théorème du point 23, chap.II). ■

Limite d'une fonction monotone

Théorème 1.13. *Soit f une fonction croissante sur un intervalle (borné ou non), $I = (a, b)$ $(a, b \in \overline{\mathbb{R}})$. Si elle est majorée (resp. minorée) , alors la limite:*

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = \sup_{(a,b)} f(x) \ \ (resp. \lim_{x \to a+0} f(x) = \inf_{(a,b)} f(x) \ ) \ existe.$$

Si elle n'est pas majorée (resp si elle n'est pas minorée), alors:

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = +\infty \ \ (resp. \lim_{x \to a+0} f(x) = -\infty).$$

Preuve. Démontrons le cas où f est majorée. Dans ce cas, $M = \sup_{(a,b)} f(x)$ existe. Alors $\forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in (a, b)$ tel que $M - \epsilon < f(x_\epsilon) \leq M$. Comme f est majorée et croissante, alors on a :

$$f(x) \leq M \ (\forall x \in (a, b)) \ \ et \ \ f(x_\epsilon) \leq f(x) \ , \ x_\epsilon \leq x < b.$$

En posant $\delta = b - x_\epsilon > 0$, on obtient:

$$M - \epsilon < f(x) \leq M < M + \epsilon, \quad b - \delta < x < b.$$

Ce qui signifie que

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = M.$$

Supposons, maintenant, que f n'est pas majorée. Alors $\forall A > 0$, $\exists x_A \in (a, b)$ tel que $f(x_A) > A$. Comme f est croissante, alors, en posant $\delta = b - x_A$, on obtient:

$$f(x) \geq f(x_A) > A \ , \ \ b - \delta < x < b.$$

Ce qui signifie que:

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = +\infty.$$

La démonstration est analogue dans le cas où f est minorée ou non minorée. ■

On a un théorème analogue dans le cas où la fonction f est décroissante.

Théorème 1.14. *Soit f une fonction décroissante sur un intervalle (borné ou non) $I = (a, b)$ $(a, b \in \overline{\mathbb{R}})$. Si elle est minorée (resp majorée) sur I, alors la limite*

$$\lim_{x \to b-0} f(x) \ = \inf_{I} f(x) \ \ (resp. \lim_{x \to a+0} f(x) = \sup_{I} f(x) \ ) \ existe.$$

Si elle n'est pas minorée (resp. n'est pas majorée), alors :

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = -\infty \ (resp. \lim_{x \to a+0} f(x) = +\infty).$$

Preuve. Elle est analogue à celle du théorème précédent en changeant le majorant par le minorant et les inégalités. ■

Théorème 1.15. *Soit f une fonction croissante (resp. décroissante) sur un intervalle (borné ou non) $I = (a,b)$ $(a,b \in \overline{\mathbb{R}})$. Alors, pour tout $x_0 \in \,]a,b[$, les limites latérales $f(x_0+0)$ et $f(x_0-0)$ existent et on a :*

$$f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0) \;\; (\text{resp. } f(x_0 + 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 - 0)).$$

Preuve. Elle est une conséquence des théorèmes 1) et 2) précédents dans les cas $I = \,]x_0, b[$ et $I = \,]a, x_0[$. ■

Critère de Cauchy

Comme pour la convergence des suites numériques, le critère de Cauchy est un critère universel pour établir si une fonction a une limite ou non.

Définition 1.28. (Critère de Cauchy en un point) *Soit f une fonction définie dans un voisinage V pointé de x_0. On dit que f vérifie le* ***critère de Cauchy*** *en x_0 si elle vérifie la propriété suivante :*

$$\begin{aligned}\forall \epsilon &> 0, \exists \delta > 0, \forall x', x'' \in V \\ &(0 < |x' - x_0| < \delta \wedge 0 < |x'' - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x') - f(x'')| < \epsilon)\,. \qquad (26)\end{aligned}$$

Définition 1.29. (Critère de Cauchy à l'infini) *Soit f une fonction définie dans un voisinage V de l'infini. On dit que f vérifie le critère de Cauchy à l'infini si elle vérifie la propriété suivante :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists A > 0, \forall x, x' \in V : (|x| > A \wedge |x'| > A \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon)\,. \qquad (27)$$

Théorème 1.16. *Soit $y = f(x)$ une fonction définie dans un voisinage V pointé de x_0 ou de l'infini. Alors pour que la limite : $\lim f(x)$ $(x \to x_0$ ou $x \to \infty)$ existe, il faut et il suffit qu'elle vérifie le critère de Cauchy en x_0 ou à l'infini.*

Preuve. Condition nécessaire. Soit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Montrons que la fonction f vérifie le critère de Cauchy en x_0. Soit $\epsilon > 0$. Pour $\epsilon' = \dfrac{\epsilon}{2} > 0$, $\exists\ \delta > 0,\ \forall x$: $(0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon'$). Alors $\forall x', x''$ tels que $0 < |x' - x_0| < \delta$ et $0 < |x'' - x_0| < \delta$, on a : $|f(x') - \ell| < \epsilon'$ et $|f(x'') - \ell| < \epsilon'$. D'où

$$|f(x') - f(x'')| = |f(x') - \ell + \ell - f(x'')| \leq |f(x') - \ell| + |f(x'') - \ell| < \epsilon' + \epsilon' = \epsilon.$$

Condition suffisante. Supposons que f vérifie le critère de Cauchy. Montrons que la limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe. Pour cela utilisons la définition 2) du point 2, §1, de la limite d'une fonction. Soit, donc, (x_n) une suite numérique convergente vers x_0. D'après le critère de Cauchy pour les suites, il suffit de démontrer que la suite $(f(x_n))$ est de Cauchy. Comme f vérifie le critère de Cauchy, alors: $\forall \epsilon > 0, \ \exists \ \delta > 0$ tel que $\forall x', x''$ vérifiant : $0 < |x' - x_0| < \delta$ et $0 < |x'' - x_0| < \delta$, on a $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$. Comme $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$, pour ce même $\delta > 0, \ \exists \ n_\delta \in \mathbf{N}$, $\forall n, m \in \mathbf{N}$ tels que $n > n_\delta$ et $m > n_\delta$, on a: $|x_n - x_0| < \delta$ et $|x_m - x_0| < \delta$. D'où:

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \epsilon.$$

Ce qui signifie que la suite $(f(x_n))$ est de Cauchy, donc convergente. Il reste à montrer que pour toutes les suites (x_n) convergentes vers x_0, alors les suites $(f(x_n))$ convergent toutes vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. En effet, soient (x_n) et (x'_n) deux suites convergentes vers x_0. D'après la première partie de la condition suffisante, on a $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$ et $\lim_{n \to +\infty} f(x'_n) = \ell'$. Comme les suites (x_n) et (x'_n) convergent vers la même limite x_0, alors la suite $x_1, x'_1, x_2, x'_2, \ ... \ , x_n, x'_n, \ ...$ converge aussi vers x_0. Dans ces conditions, la suite $f(x_1), \ f(x'_1), \ f(x_2), \ f(x'_2), \ ... \ , f(x_n), \ f(x'_n), \ ...$ est aussi convergente. Si $\ell \neq \ell'$, on obtiendrait deux sous-suites de cette suite convergeant vers deux limites différentes , ce qui n'est pas possible. Donc $\ell = \ell'$. ■

1.2.7 Limites des fonctions usuelles. Limites remarquables

Limites de fonctions usuelles

Dans ce paragraphe, nous poursuivons l'étude du comportement des fonctions usuelles aux bords de leurs domaines de définition.

Théorème 1.17. *On a les égalités suivantes:*

i)

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty \ \ , \forall \alpha > 0 \ , \\ 0 \ \ , \forall \alpha < 0 \ . \end{cases}$$

ii)

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty \ \ , \ a > 1 \ , \\ 0 \ \ , \ 0 < a < 1. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0 \ \ , \ a > 1 \ , \\ +\infty \ \ , \ 0 < a < 1 \ . \end{cases}$$

iii)

$$\lim_{x\to 0+0} \log_a x = \begin{cases} -\infty \ \ , a>1 \ , \\ +\infty \ \ , \ 0<a<1 \ . \end{cases}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty \ \ , \ a>1 \ , \\ -\infty \ \ , \ 0<a<1, \end{cases}$$

iv)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} tgx = +\infty, \qquad \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}+0} tgx = -\infty \ .$$

v)

$$\lim_{x\to +\infty} arctgx = \frac{\pi}{2}; \qquad \lim_{x\to -\infty} arctgx = -\frac{\pi}{2} \ .$$

vi)

$$\lim_{x\to +\infty} arcctgx = 0 \ ; \qquad \lim_{x\to -\infty} arcctgx = \pi \ .$$

Preuve. Faisons la démonstration pour certains de ces cas en utilisant la définition des limites de fonctions. Pour les autres cas, nous proposons au lecteur de les faire à titre d'exercices.

i) Cas $\alpha > 0$. Montrons que $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = +\infty$. Soit, donc, $A > 0$. On a :

$$|x^\alpha| > A \Longleftrightarrow x^\alpha > A \Longleftrightarrow x > A^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Il suffit de choisir, donc, $\Delta_A = A^{\frac{1}{\alpha}}$.

ii) Montrons que $\lim\limits_{x\to +\infty} a^x = 0 \ \ (0 < a < 1)$. Soit $\epsilon > 0$, avec ϵ assez petit ($\epsilon < 1$). On a, en vertu des propriétés da la fonction logarithme:

$$|a^x| < \epsilon \Longleftrightarrow |x| > \frac{\log \epsilon}{\log a} > 0 \ .$$

Il suffit, donc, de choisir $A > \dfrac{\log \epsilon}{\log a}$.

iii) Montons que $\lim\limits_{x\to 0+0} \log_a x = -\infty$ $(a > 1)$. Soit $A > 0$. On a , en vertu des propriétés da la fonction exponentielle :

$$\log_a x < -A \Longleftrightarrow x < a^{-A}.$$

Il suffit, donc, de choisir $0 <\delta_A < a^{-A}$.

iv) Montrons que $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}+0} \mathrm{tg}x = -\infty$. Soit $A > 0$. On a, en vertu des propriétés de la fonction arctangente: pour $0 > x > -\dfrac{\pi}{2}$:

$$\mathrm{tg}x < -A \Longleftrightarrow x < \mathrm{arctg}(-A) \Longleftrightarrow x - (-\frac{\pi}{2}) < \mathrm{arctg}(\,-A) + \frac{\pi}{2} \ .$$

Il suffit , donc, de choisir : $0 <\delta_A < \mathrm{arctg}(-A) + \dfrac{\pi}{2}$.

v) Voir l'exemple 3) du point 4, § 2. ■

Quelques limites remarquables

Comme pour les suites numériques, certaines limites de fonctions élémentaires reviennent souvent dans les calculs, il est , donc, préférable de les établir une fois pour toute. On les appelle **limites remarquables**.

Corollaire 1.4. **i**)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \ . \tag{1.2.1}$$

ii)

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e \ ; \\ &\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \ . \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

iii)

$$\lim_{x\to\infty}\left|a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ \dots + a_nx^n\right| = \lim_{x\to\infty}|a_nx^n| = +\infty. \tag{1.2.3}$$

iv)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m} = \lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m} = \begin{cases} \infty \ , \ n > m \ , \\ \dfrac{a_n}{b_n} \ , \ n = m \ , \\ 0 \ , \ n < m \ . \end{cases} \tag{1.2.4}$$

1.2.8 Continuité d'une fonction en un point

Définition 1.30. *On dit qu'une fonction f est* ***continue au point*** $x_0 \in \mathbb{R}$ *si :*
1) f est définie dans un voisinage V de x_0,
2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
D'après la notion de la limite d'une fonction, on a les définitions équivalentes suivantes:

$$f : continue\ en\ x_0 \in \mathbb{R} \ \overset{déf.}{\Longleftrightarrow} \ \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in V : (0 \le |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0| < \epsilon)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall(x_n) \subset V : \left(\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)\right).$$

Remarque 1.19. ***1)*** *δ dépend de ϵ et de x_0, $\delta = \delta(\epsilon, x_0)$.*
2) *Comme $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$, alors f continue en x_0 est équivalent à :*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x)$$

1.2.9 Continuité à droite. Continuité à gauche

Définition 1.31. *On dit que la fonction f est* **continue à droite (resp. à gauche)** *au point $x_0 \in \mathbb{R}$ si:*
1) *f est définie dans un ensemble contenant un intervalle de la forme $[x_0, a[$ $(a > x_0)$ (resp. de la forme $]a, x_0]$ $(a < x_0)$);*
2) *$f(x_0 + 0) = f(x_{0)}$ (resp. $f(x_0 - 0) = f(x_0)$).*

Théorème 1.18. *La fonction f est continue en x_0 si et seulement si :*

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$$

Remarque 1.20. *Si f est définie sur le segment $[a, b]$, alors on dit que f est continue au point a (resp. en b) si on a $f(a + 0) = f(a)$ (resp. $f(b - 0) = f(b)$).*

1.2.10 Fonctions continues sur un ensemble

Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et $I \subset X$.

Définition 1.32. *On dit que la fonction f est* **continue sur l'ensemble** *I si elle est continue en tout point de I.*

Remarque 1.21. *Cette définition est équivalente à la suivante:*
f est continue sur I si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset I$, convergente dans I, alors:

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to+\infty} x_n)$$

Exemple 19. *La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$. En effet, soit $x_0 > 0$, alors, dans ce cas, on a:*

$$\sqrt{x} - \sqrt{x_0} = \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \le \frac{x - x_0}{\sqrt{x_0}} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \frac{0}{\sqrt{x_0}} = 0,$$

et si $x_0 = 0$, alors pour $\epsilon > 0$ on prend $\delta = \epsilon^2$ et alors, si $0 < x < \delta$, on obtient $\sqrt{x} < \epsilon$, c'est à dire que $\lim\limits_{x\to 0+0} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$.

Remarque 1.22. ***1)*** *La notion de continuité n'a pas de sens à l'infini car $f(\infty)$ n'est pas défini.*

2) Il existe des fonctions qui ne sont continues en aucun point de leur domaine de définition. Par exemple, la fonction de Dirichlet:

$$f(x) = \begin{cases} 0\ ,\ x \in \mathbb{Q}\ , \\ 1\ ,\ x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \end{cases}$$

n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$. *En effet, soit* $x_0 \in \mathbb{R}$. *D'après la densité de* $\mathbb{Q}$ *dans* $\mathbb{R}$, *il existe une suite* $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ *telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$. *De même, il existe une suite* $(x'_n) \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} x'_n = x_0$, *mais on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 1 \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} f(x'_n) = 0.$$

Ce qui signifie que f *n'est pas continue en* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Comme* x_0 *est arbitraire, alors* f *n'est continue en aucun point de* $\mathbb{R}$.

1.2.11 Discontinuité. Classification des points de discontinuité.

Discontinuité. Prolongement par continuité.

Définition 1.33. *On dit la fonction* f *est* ***discontinue*** *en* x_0, *ou que* x_0 *est un* ***point de discontinuité*** *de* f, *si* f *n'est pas continue en ce point.*

Remarque 1.23. *D'après cette définition,* f *est discontinue en* x_0 *si on a l'une des conditions suivantes:*

1) *soit* f *n'est pas définie en* x_0,

2) *soit* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *n'existe pas,*

3) *soit* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Définition 1.34. *Si la première condition n'est pas satisfaite et si* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, *on peut rendre la fonction* f *continue en* x_0 *en posant* $f(x_0) = \ell$. *On dit , dans ce cas, qu'on a prolongé* f *en* x_0 *par continuité ou que l'on a obtenu un* ***prolongement par continuité*** *en* x_0. *Dans ce cas, on a éliminé la discontinuité et on dit que* x_0 *est un* ***point de discontinuité éliminable***.

Exemple 20. *La fonction* $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ *n'est pas définie au point* $x = 0$, *donc elle n'est pas continue en ce point. Cependant, on peut la prolonger par continuité en posant* $f(0) = 1$, *c'est à dire :*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & si\ x \neq 0 \\ 1 & si \quad x = 0\ . \end{cases}$$

En effet, on a, dans ce cas, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$. *Par contre, la fonction*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} \ si\ x \neq 0, \\ 2 \quad si \quad x = 0\ , \end{cases}$$

est définie en 0, mais elle n'est pas continue en ce point.

Points de discontinuité de première et deuxième espèces.

Définition 1.35. *On dit que le point de discontinuité* $x_0 \in \mathbb{R}$ *de* f *est :*
1) de première espèce *si* $f(x_0 + 0)$ *et* $f(x_0 - 0)$ *existent et sont distinctes ;*
2) de deuxième espèce *si au moins l'une des limites* $f(x_0 + 0)$ *ou* $f(x_0 - 0)$ *n'existe pas ou est infinie.*

Fonctions continues par morceaux.

Définition 1.36. *On dit qu'une fonction* f *est* ***continue par morceaux sur le segment*** $[a, b]$ *si elle est continue sur ce segment sauf en un nombre fini de points qui sont des points de discontinuité de première espèce.*

Définition 1.37. *On dit qu'une fonction est* ***continue par morceaux sur un intervalle*** *quelconque si elle est continue par morceaux sur tout segment contenu dans cet intervalle.*

Exemple 21. ***1)*** *La fonction* $f(x) = sgnx$ *a un point de discontinuité de première espèce en* $x_0 = 0$. *En effet, on a :*

$$sgn(0 + 0) = \lim_{x\to 0+} sgnx = \lim_{x\to 0+} 1 = 1,$$

et

$$sgn(0 - 0) = \lim_{x\to 0-} sgnx = \lim_{x\to 0-} (-1) = -1.$$

Le saut est, donc, égal à 2.
2) *La fonction* $f(x) = \frac{1}{x}$ *a un point de discontinuité de deuxième espèce en* $x_0 = 0$. *En effet, on a :*

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x} = +\infty \quad et \quad \lim_{x\to 0-}\frac{1}{x} = -\infty.$$

3) *La fonction*

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{1}{x}\ , & x < 0\ , \\ 0\ , & x = 0\ , \\ \cos\frac{1}{x}\ , & x > 0\ . \end{cases}$$

a un point de discontinuité de deuxième espèce en $x_0 = 0$. En effet, on a :

$$f(0-0) = \lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0,$$

et

$$f(0+0) = \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x} \text{ n'existe pas}$$

***4)** La fonction $f(x) = E(x)$ est continue en tout point $x \in]n, n+1[$ $(n \in \mathbb{Z})$ et discontinue en tout point $x = n$ $(n \in \mathbb{Z})$ qui sont des points de discontinuité de première espèce. Donc, elle est continue par morceaux sur l'ensemble $\mathbb{R}$. En effet, tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ contient un nombre fini de points de $\mathbb{Z}$.*

***5)** La fonction $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ a un point de discontinuité de deuxième espèce en $x_0 = 0$. En effet, $f(0+0)$ et $f(0-0)$ n'existent pas.*

***6)** Les figures suivantes représentent les différents cas de fonctions ayant une discontinuité de première espèce en x_0.*

1.2.12 Opérations sur les fonctions continues

Opérations arithmétiques sur les fonctions continues

Théorème 1.19. *Soient f et g deux fonctions continues au point $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors les fonctions $f \pm g$, $f.g$, λf, $\frac{f}{g}$ (si $g(x_0) \neq 0$) , $|f|$ sont continues au point x_0.*

Preuve. Conséquence du théorème sur les opérations sur les limites de fonctions. ■

1.2.13 Continuité des fonctions composées

Théorème 1.20. *Soient f une fonction continue au point $x_0 \in \mathbf{R}$ et g une fonction continue en $y_0 = f(x_0)$. Alors la fonction composée gof est continue au point x_0.*

Preuve. Soit (x_n) une suite appartenant au domaine de définition de f telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$. Posons $y_n = f(x_n)$, $n = 1, 2, ...$. Comme f et g sont respectivement continues en x_0 et $y_0 = f(x_0)$, alors on a les égalités suivantes:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} (gof)(x_n) &= \lim_{n\to+\infty} g(f(x_n)) = g(\lim_{n\to+\infty} f(x_n)) = \\ &= g(f(\lim_{n\to+\infty} x_n)) = g(f(x_0)) = (gof)(x_0). \end{aligned}$$

■

1.2.14 Théorèmes relatifs aux fonctions continues.

Les fonctions continues sur un intervalle possèdent des propriétés globales intéressantes, notamment sur un segment, permettant d'obtenir de résultats fructueux dans certains problèmes théoriques et pratiques.

Premier théorème de Bolzano-Cauchy

Théorème 1.21. *Soit f une fonction définie et continue sur le segment $\Delta = [a, b]$ telle que $f(a).f(b) < 0$ (c'est à dire que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires), alors il existe, au moins, un point $c \in]a, b[$ vérifiant $f(c) = 0$.*

Remarque 1.24. ***1)*** *Le théorème affirme l'existence du point c où la fonction f s'annule, mais il ne dit rien sur sa valeur.*
2) *La démonstration de ce théorème par la méthode de Bolzano, non seulement, prouve l'existence du point c où la fonction s'annule, mais indique une méthode d'approximation pour trouver c.*
3) *Géométriquement, le théorème signifie que la courbe d'équation $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, coupe l'axe des abscisses au point $c \in]a, b[$. De manière équivalente, il affirme que l'équation $f(x) = 0$ admet, au moins, une solution dans $]a, b[$ (voir figure).*
4) *Nous donnons, en complément, voir point 27, une autre démonstration de ce théorème, proposée par Cauchy.*
5) *La condition de continuité sur le segment $[a, b]$ est essentielle : la fonction $f(x) = E(x) - \dfrac{1}{2}$ vérifie les conditions $f(0) = -\dfrac{1}{2} < 0$ et $f(1) = \dfrac{1}{2} > 0$, mais $f(x) \neq 0$ sur $[0, 1]$.*

Corollaire 1.5. *Tout polynôme réel de degré impair admet, au moins, une racine réelle.*

Preuve. Soit $P(x) = a_0 + a_1x + \ ... \ + a_{2n+1}x^{2n+1}$. Pour les valeurs assez grandes en valeur absolue de x, le polynôme est du signe du membre $a_{2n+1}x^{2n+1}$. Pour $x > 0$, assez grand, $P(x)$ est du signe de a_{2n+1} et pour $x < 0$, assez petit, il est de signe contraire. Comme $P(x)$ est continue, alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $P(c) = 0$. ■

Exemple 22. *Soit $P(x) = x^5 - 2x + 1$. On a $P(-2) = -27$ et $P(2) = 29$. Donc P admet au moins une racine réelle comprise entre -2 et 2 dont $x = 1$.*

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1.22. *T(Bolzano-Cauchy). Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle quelconque $I \subset \mathbb{R}$ et soient $a, b \in I$ $(a < b)$. Alors pour tout nombre α , compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un nombre $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = \alpha$.*

Preuve. Soit la fonction $g(x) = f(x) - \alpha$. Alors elle est définie, continue sur le segment $[a, b] \subset I$ et $g(a)$, $g(b)$ sont de signes contraires. D'après le théorème précédent, il existe un point $c \in]a, b[$ tel que $g(c) = 0$. Ce qui est équivalent à $f(c) = \alpha$. ■

1.2.15 Théorème de la fonction réciproque

Les résultats précédents permettent d'établir les conditions d'existence et de continuité de la fonction inverse d'une fonction.

Théorème 1.23. *Soit f une fonction définie, strictement croissante (resp.strictement décroissante) et continue sur un intervalle quelconque $I \subset \mathbf{R}$. Alors f admet une fonction réciproque définie, strictement croissante (resp strictement décroissante) et continue sur l'intervalle $J = f(I)$.*

Exercice. (Théorème). Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence suivante:

$$f \text{ injective sur } I \iff f \text{ strictement monotone sur } I.$$

Que peut-on dire si f n'est pas continue sur I ?

1.3 Dérivée et différentiabilité d'une fonction

La notion de dérivée apparaît dans de nombreux problèmes théoriques et pratiques. Elle est intimement liée à la notion de vitesse en physique et à celle de la tangente à une courbe en géométrie. Aussi , elle est une notion fondamentale de l'analyse mathématique. Signalons, avant tout, que c'est grâce à la notion de limite que la dérivée a été introduite.

1.3.1 Fonctions dérivables. Dérivée en un point

Définition 1.38. *Soit f une fonction définie dans un voisinage V de $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f est **dérivable au point** x_0 si la limite suivante, notée $f'(x_0)$, existe*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

*Cette limite est appelée la **dérivée de** f **en** x_0 et est aussi notée par: $\frac{df}{dx}(x_0)$ ou $Df(x_0)$ ou $\dot{f}(x_0)$.*

Remarque 1.25. (Autres écritures)

1) *En posant $h = x - x_0$, la dérivée s'écrit:*

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

2) *Dans certains cas, notamment en physique , on adopte la notation suivante : soit $\Delta x = x - x_0$ l'accroissement de x en x_0 et $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ l'accroissement correspondant de la fonction f , alors on peut écrire la dérivée comme suit:*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

*Le rapport $\Psi(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ est appelé le **rapport différentiel de** f **en** x_0 correspondant à Δx.*

Exemple 23. *La fonction $f(x) = x^2$ est dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}$. En effet, on a, après simplification :*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x.$$

C'est à dire que : $f'(x) = 2x, \ \forall \, x \in \mathbb{R}$.

Différentiabilité d'une fonction

Dans ce paragraphe, on introduit la notion de différentiabilité d'une fonction qui est une notion équivalente à celle de la dérivabilité pour les fonctions d'une seule variable.

Fonctions différentiables Pour introduire cette notion, considérons une fonction f définie dans un voisinage V de x_0 et dérivable en ce point. D'après la formule (2) de la définition de $f'(x_0)$, il existe un fonction α définie dans un voisinage $W \subset \mathbf{R}$ de 0 telle que $\alpha(h) = o(1)$ $(h \to 0)$ et $\forall h \in W$, vérifiant $x_0 + h \in V$, on a :

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \alpha(h),$$

ou bien

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0).h + \alpha(h).h.$$

Ainsi l'accroissement total de la fonction f correspondant à l'accroissement $\Delta x = h \in W$ de la variable x en x_0 s'écrit comme suit:

$$\Delta y_{x_0}(h) = \Delta f_{x_0}(h) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0).\Delta x + \alpha(\Delta x).\Delta x.$$

Définition 1.39. *On dit qu'une fonction f est* ***différentiable au point*** $x_0 \in \mathbb{R}$ *si :*
1) *elle est définie dans un voisinage V de x_0 ,*
2) *s'il existe un nombre $A \in \mathbb{R}$ et une fonction α tels que:*

$$\Delta y = \Delta f_{x_0}(h) = f(x_0+h) - f(x_0) = A.h + \alpha(h).h\ ,$$

avec $\lim\limits_{h\to 0} \alpha(h) = 0.$

Théorème 1.24. *Pour qu'une fonction f soit différentiable au point x_0, il faut et il suffit qu'elle soit dérivable en x_0.*

Preuve. Supposons que f est différentiable en x_0, alors, en divisant (5) par $h \neq 0$, on obtient :

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = A + \alpha(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} A = f'(x_0).$$

c'est à dire, on a :

$$\Delta y = f'(x_0)h + \alpha(h).h\ ,\ \ \alpha(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0\ .$$

La condition suffisante a été démontrée au début de ce point. ■

Exemple 24. *Dans l'exemple précédent du point 1, on a $\Delta y = (x+h)^2 - x^2 = 2xh + h.h$, c'est à dire que $f'(x) = 2x$ et $\alpha(h) = h$.*

Comme première conséquence de la différentiabilité, on a le résultat suivant.

Théorème 1.25. *Si f est différentiable en x_0, alors elle est continue en ce point.*

Preuve. En effet, on a

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\Delta y=f'(x_0)h+\alpha(h).h \underset{h\to 0}{\to} 0 \ .$$

■

Remarque 1.26. *L'inverse est faux. Par exemple, la fonction $f(x)=|x|$ est continue au point $x_0=0$, mais elle n'est pas dérivable en ce point. En effet, on a*

$$f'_{+}(0)=\lim_{h\to 0+}\frac{|h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h}{h}=1$$

et

$$f'_{+}(0)=\lim_{h\to 0-}\frac{|h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{-h}{h}=-1,$$

c'est à dire que $f'(0)$ n'existe pas.

Interprétation géométrique de la dérivée

On démontre que l'existence de la dérivée de la fonction f en un point x_0 est équivalente, sur le plan géométrique, à celle de la tangente à la courbe (C) d'équation $y=f(x)$ au point $M_0(x_0,y_0)$ avec $y_0=f(x_0)$. Soit, donc, f une fonction dérivable (ou différentiable) en x_0 et $f'(x_0)\neq 0$. Considérons la courbe (C) au voisinage de x_0 et traçons 1^o) la sécante passant par les points $M_0(x_0,f(x_0))$, $M(x_0+\Delta x,\ f(x_0+\Delta x))\in(C)$, 2^o) la droite parallèle à l'axe Ox passant par M_0. D'après la figure, on a : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\overline{MN}}{\overline{M_0N}}=tg\varphi$, où φ est l'angle compris entre l'axe Ox et la sécante M_0M. Comme f est dérivable en x_0, alors, quand $\Delta x\longrightarrow 0$ ou $M\longrightarrow M_0$, la sécante MM_0 tend vers une position limite qui est la **tangente** (T) à la courbe (C) en M_0 ou , de manière équivalente, tgφ $\longrightarrow$tgθ , où θ est l'angle compris entre l'axe Ox et la tangente (T), d'où tg$\theta=f'(x_0)$.

L'équation de la tangente (T) est :

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)\ .$$

1.3.2 Dérivées à droite et à gauche en un point

Définition 1.40. *On dit que la fonction f est* ***dérivable à droite (resp. à gauche) en*** *$x_0\in\mathbb{R}$ si:*

1) *elle est définie sur un ensemble contenant un intervalle de la forme $[x_0,a[$ $(a>x_0)$*

(resp. $]a, x_0]$ $(a < x_0)$ *) ;*
***2)** la limite à droite (resp. à gauche), suivante, existe:*

$$\lim_{x \to x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0) \quad (resp. \lim_{x \to x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0) \ ).$$

Les limites $f'_+(x_0)$ *et* $f'_-(x_0)$ *sont appelées respectivement la **dérivée à droite** et la **dérivée à gauche** de* f *en* x_0*.*

Théorème 1.26. *Pour qu'une fonction* f *soit dérivable au point* x_0 *, il faut et il suffit qu'elle soit dérivable à droite et à gauche en ce point et que* $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$*.*

Preuve. Conséquence du théorème de l'existence de la limite d'une fonction en un point. ■

Si les dérivées à droite et à gauche existent et sont différentes, alors la fonction n'est pas dérivable. Sur le plan géométrique, cela signifie qu'au point $M_0(x_0, f(x_0))$, la courbe (C) admet une tangente à droite et une tangente à gauche. Les dessins suivants représentent les différents cas qui peuvent se présenter.

Remarque 1.27. (Dérivées infinies) *On dit que* f *admet une **dérivée infinie** en* x_0 *si la dérivée à droite ou la dérivée à gauche en* x_0 *est infinie:*

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty \ , \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty.$$

Géométriquement, cela signifie qu'au point $M_0(x_0, f(x_0))$ *, la courbe* (C) *d'équation* $y = f(x)$ *admet une tangente parallèle à l'axe des ordonnées* Oy*. Les dessins suivants représentent les différents cas possibles.*

Remarque 1.28.

$$f \text{ n'est pas dérivable en } x_0 \Longleftrightarrow \begin{cases} i) \ \ f'_+(x_0), f'_-(x_0) \ \exists \ \wedge \ f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0), \\ ii) \ \ f'_+(x_0) \ \vee \ f'_-(x_0) \text{ n'existe pas}, \\ iii) \ f'_+(x_0) = \infty \ \vee \ f'_-(x_0) = \infty. \end{cases}$$

1.3.3 Fonctions dérivables sur un ensemble

Soit f définie sur l'intervalle $[a, b]$. On dit que f est dérivable au point a (resp. b) si $f'_+(a)$ (resp. $f'_-(b)$) existe, c'est à dire que $f'(a) = f'_+(a)$ (resp. $f'(b) = f'_-(b)$).

Définition 1.41. *On dit qu'une fonction f est **dérivable sur un ensemble** $X \subset \mathbb{R}$ si elle possède une dérivée en chaque point de X, c'est à dire $\forall x \in X$, $f'(x)$ existe.*

Si f est dérivable sur l'ensemble X, alors on obtient une nouvelle fonction f', définie sur X par $y = f'(x)$, appelée fonction-dérivée de f . On peut considérer, dans ce cas, que la dérivation est une opération qui à une fonction dérivable associe une fonction qui est sa dérivée. Ainsi, si on note cette opération de dérivation par le symbole $\dfrac{d}{dx}$, appelé **opérateur de dérivation**, l'ensemble des fonctions réelles définies dans X par $F(X, \mathbb{R})$ et le sous-ensemble de $F(X, \mathbb{R})$ formé des fonctions dérivables sur X, par $D(X, \mathbb{R})$ où $D(X, \mathbb{R}) \subset F(X, \mathbb{R})$, alors on définit une application:

Exemple 25. *La fonction*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & 0 < |x| \leq 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

est dérivable sur $[-1, 1]$, mais elle n'est pas continûment dérivable sur ce segment. En effet, la fonction dérivée

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} , & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

n'est pas continue en $x = 0$.

1.3.4 Opérations sur les dérivées

Opérations arithmétiques sur les dérivées

Théorème 1.27. *Soient f, g deux fonctions dérivables en x_0. Alors les fonctions $f \pm g$, $f.g$, $\lambda.f$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, $\dfrac{f}{g}$ ($g \neq 0$ dans un voisinage V de x_0) sont dérivables en x_0 et on a :*

1) $(f \pm g)' (x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$;

2) $(f.g)' (x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$;

3) $(\lambda.f)' (x_0) = \lambda.f'(x_0)$;

4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' (x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Preuve. 1) D'après les opérations sur les limites, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{(f\pm g)(x_0+h)-(f\pm g)(x)}{h} &= \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x)}{h}\pm\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x)}{h} \\ &= f'(x_0)\pm g'(x_0).\end{aligned}$$

2) Sachant que g est continue en x_0 (voir théorème 2 du point 2), on a :

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x_0+h)-(fg)(x_0)}{h} &= \frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)+f(x_0)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h} \\ &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}g(x_0+h)+f(x_0)\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \\ &\underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)\end{aligned}$$

3) On applique 2) pour $g=\lambda$.

4) Sachant que g est continue en x_0, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x_0+h)-\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{h} &= \frac{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{g(x_0+h)g(x_0)}g(x_0)-f(x)\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{g(x_0)g(x_0+h)}}{h} \\ &= \frac{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}g(x_0)}{g(x_0+h)g(x_0)}-\frac{f(x_0)\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}{g(x_0)g(x_0+h)} \\ &\underset{h\to 0}{\longrightarrow}\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.\end{aligned}$$

■

En termes de différentielles, les propriéts précédentes s'écrivent comme suit:

1) $d(f\pm g)=df\pm dg$;
2) $d(f.g)=g.df+f.dg$;
3) $d(\lambda.f)=\lambda.df$;
4) $d\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g.df-f.dg}{g^2}$, *si* $g\neq 0$.

Dérivée d'une fonction composée

Théorème 1.28. *Soient f une fonction dérivable en x_0 et g une fonction dérivable en $y_0=f(x_0)$. Alors la fonction composée $g\circ f$ est dérivable en x_0 et on a :*

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(y_0).f'(x_0).$$

Preuve. Soit $y = f(x)$, alors on a :

$$\begin{aligned}\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} &= \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}\frac{y - y_0}{x - x_0} = \\ &= \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} g'(y_0).f'(x_0),\end{aligned}$$

car f est continue en x_0 et $y \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} y_0$.

En posant $z = g(y) = g(f(x))$, on peut considérer z comme étant une fonction soit de la variable y, soit de la variable x, ainsi on peut écrire la formule (24) comme suit :

$$\frac{dz}{dx}(x_0) = \frac{dz}{dy}(y_0)\frac{dy}{dx}(x_0).$$

Ou symboliquement:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}.\frac{dy}{dx}.$$

En notant $z'_x = \dfrac{dz}{dx}$ et $z'_y = \dfrac{dz}{dy}$, on peut, alors écrire: $z'_x = z'_y.y'_x$ où $y'_x = y'$. ■

Dérivée d'une fonction inverse

Théorème 1.29. *Soit f une fonction inversible dans un voisinage de x_0 et dérivable en x_0 telle que $f'(x_0) \neq 0$. Alors la fonction inverse f^{-1} est dérivable au point $y_0 = f(x_0)$ et on a*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Preuve. Soit $y = f(x)$. Comme $y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$, alors :

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \frac{1}{f'(x_0)}.$$

On peut écrire:

$$f'(x_0) = \frac{1}{\left(f^{-1}\right)'(y_0)} \quad \text{si } \left(f^{-1}\right)'(y_0) \neq 0$$

ou symboliquement : $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$ ou bien : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$ si $\dfrac{dx}{dy} \neq 0$. ■

Remarque 1.29. *Si $f'(x_0) = 0$, il est clair qu'on peut considérer $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \infty$ et inversement, si $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = 0$, alors $f'(x_0) = \infty$.*

Remarque 1.30. *Sur le plan géométrique, $\left(f^{-1}\right)'(y_0)$ est égale à la tangente de l'angle compris entre la tangente T à la courbe (C) d'équation $y = f(x)$ au point $M_0(x_0, y_0)$ et l'axe des ordonnées Oy. Voir figure.*

1.3.5 Calcul des dérivées des fonctions usuelles et élémentaires.

Table des dérivées de fonctions usuelles et élmentaires.

Théorème 1.30. *Les fonctions usuelles et élémentaires sont dérivables dans les domaines indiqués et on a la table suivante des dérivées:*

1.3.6 Dérivées d'ordres supérieurs.

Dérivée d'ordre n

Soit $y = f(x)$ une fonction dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, alors sa dérivée f' est une fonction définie sur I, appelée **dérivée première** ou **dérivée d'ordre un** de f et est notée:

$$f'(x) \text{ ou } \frac{df}{dx}(x) \text{ ou } \frac{dy}{dx} \text{ ou } Df(x) \text{ ou } \dot{f}(x).$$

Si la fonction dérivée f' est elle même dérivable sur I , alors sa dérivée est une fonction définie sur I, notée $f''(x) = (f'(x))'$ ou $\dfrac{d^2f}{dx^2}$ ou $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, appelée **dérivée seconde** ou **dérivée d'ordre 2** de f. De même, si f'' est dérivable sur I, alors, sa dérivée est une fonction définie sur I, notée $f'''(x) = (f''(x))'$ ou $\dfrac{d^3f}{dx^3}(x)$ ou $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, appelée dérivée troisième ou dérivée d'ordre 3 de f. De manière inductive, on définit la **dérivée n-ième** ou **dérivée d'ordre n** de f par :

$$f^{(0)}(x) = f(x) \text{ et } f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)', \ n \in \mathbb{N}^* ,$$

si la fonction $f^{(n-1)}$ est définie et dérivable sur I. On note la dérivée n-ième par :

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' \text{ ou } \frac{d^nf}{dx^n}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right) \text{ ou } \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Remarque 1.31. *Comme pour l'opérateur de dérivation* $\dfrac{d}{dx}$ *(voir point 8), on peut définir, de manière plus générale, l'opérateur de dérivation* $\dfrac{d^n}{dx^n}$ *, défini dans l'ensemble des fonctions* n *fois dérivables sur un ensemble* $X \subset \mathbb{R}$*, noté* $D^n(X, \mathbb{R}) \subset F(X, \mathbb{R})$*, par:*

$$\begin{array}{rcl} D^n(X,\mathbb{R}) & \longrightarrow & F(X,\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \dfrac{d^nf}{dx^n} = f^{(n)}. \end{array}$$

Exemple 26. *1) Calculons* $y^{(n)}$ *si* $y = x^a,\ x > 0\ \ (a \in \mathbb{R})$. *On a :*

$$y' = (x^a\ )' = ax^{a-1}\ , y'' = (ax^{a-1})' = a(a-1)x^{a-2}\ .$$

Par récurrence, supposons que $y^{(n)} = a(a-1)(a-2)...(a-n+1)x^{a-n}$, *alors on a :*

$$y^{(n+1)} = \left(y^{(n)}\right)' = a(a-1)(a-2)...(a-n+1)(a-n)x^{a-(n+1)}.$$

2) Calculons $\sin^{(n)} x$. *On a :*

$$\sin' x = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),\quad \sin'' x = \cos' x = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right).$$

Montrons que : $\sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2}),\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}$. *Supposons que la relation est vraie pour* n. *On a alors:*

$$\begin{aligned} \sin^{(n+1)} x &= \left(\sin^{(n)} x\right)' = \sin'(x + n\frac{\pi}{2}) = \cos(x + n\frac{\pi}{2}) \\ &= \sin(x + n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

De même, on montre que : $\cos^{(n)} x = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$.
3) Soit $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n,\ x \in \mathbb{R}$, *alors:* $P^{(m)}(x) = 0,\ \forall m > n$.
4) La fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^2\ \ ,\ x \geq 0\ , \\ -x^2,\ x \leq 0\ , \end{cases}$$

admet une dérivée d'ordre un sur $\mathbb{R}$ *et une dérivée d'ordre deux sur* $\mathbb{R} - \{0\}$. *En effet, si* $x \neq 0$, *on a* $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$ *pour* $x > 0$ *et* $f'(x) = -2x$, $f''(x) = -2$ *pour* $x < 0$. *Si* $x = 0$, *on a :*

$$f'(0+0) = \lim_{h\to+0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to+0} \frac{h^2}{h} = 0,$$

$$f'(0-0) = \lim_{h\to-0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to-0} \frac{-h^2}{h} = 0\ ,$$

d'où $f'(0) = 0$.
Montrons que $f''(0)$ *n'existe pas. En effet, on a :*

$$f''_+(0) = \lim_{h\to0+} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \lim_{h\to0+} \frac{2h}{h} = 2\ ,$$

$$f''_-(0) = \lim_{h\to0-} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \lim_{h\to0-} \frac{-2h}{h} = -2.$$

Donc $f''(0)$ *n'existe pas.*

Fonctions de classe C^n

Si une fonction f est dérivable sur un intervalle , alors elle est continue. Sa dérivée f' est une fonction qui n'est pas nécessairement continue. Plus généralement, si f admet une dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, alors les fonctions dérivées f', f'', ... , $f^{(n-1)}$ sont continues, mais la fonction dérivée d'ordre n, $f^{(n)}$, peut ne pas l'être (voir l'exemple 4, point 17). Les fonctions dérivables jusqu'à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ et dont la dérivée $n-ième$ est continue forment une classe importante dans l'ensemble des fonctions.

Définition 1.42. *Une fonction f définie dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est dite* ***fonction de classe*** *$C^n(I)$ si $f^{(n)}$ existe et est continue sur I. On note $f \in C^n(I)$.*

Remarque 1.32. $f \in C^n(I) \Longleftrightarrow f, f', f''$, ... , $f^{(n)}$ *sont continues sur I.*

Remarque 1.33. ***1)*** *Si $I = [a, b]$, alors en a et b, on sous-entend les dérivées à droite et à gauche respectivement.*
2) $C^n(I) \subset D^n(I)$, $\forall n = 1, 2, \ldots$.
3) $C^n(I) \subset C^{n-1}(I)$, $n = 1, 2, \ldots$.
4) Dans le cas où $f \in C^1(I)$, on dit que f est continûment dérivable sur I.

Définition 1.43. *Une fonction f est dite* ***indéfiniment dérivable*** *ou de classe C^∞ sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ si elle admet des dérivées de tout ordre sur I. On note $f \in C^\infty(I)$.*

Remarque 1.34. *Il est clair que :*

$$f \in C^\infty(I) \Longleftrightarrow f \in C^n(I),\ \forall n \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow f \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} C^n.$$

Les fonctions de classe C^∞ forment une sous-classe de C^n, $\forall n \in \mathbb{N}$ et sont considérées comme de "bonnes fonctions".

Exemple 27. ***1)*** a^x ($a > 0,\ a \neq 1$), $\sin x,\ \cos x \in C^\infty(\mathbb{R})$.
2) $\log_a x \in C^\infty(]0, +\infty[)$.
3) $f(x) = x^n \sin \dfrac{1}{x} \in C^{n-1}(\mathbb{R})$, *mais elle n'appartient pas à $C^n(\mathbb{R})$ car $f^{(n)}(x)$ n'est pas continue en $x = 0$.*
4) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & si\ \ x \neq 0, \\ 0 & si\ \ x = 0 \end{cases}$ *est de classe $C^\infty(\mathbb{R})$.*
5) *La fonction*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & 0 < |x| \leq 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

est dérivable sur $[-1,1]$, mais elle n'est pas continûment dérivable sur ce segment. En effet, la fonction dérivée

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\ , & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

Dérivée $n-$ième du produit de deux fonctions

Théorème 1.31. (Formule de Leibnitz) *Soient f,g deux fonctions dérivables jusqu'à l'ordre n $\in\mathbb{N}$ en un point $x\in\mathbb{R}$. Alors le produit $f.g$ est dérivable jusqu'à l'ordre n au point x et on a la formule:*

$$(f.g)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x),$$

où $\dbinom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Preuve. Pour $n=1$, on a :

$$(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

Supposons la formule vraie jusqu'à n et démontrons la jusqu'à l'ordre $n+1$. En appliquant les formules de la combinatoire :

$$\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}=\binom{n}{n}=\binom{n+1}{n+1}=1$$

et

$$\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1},\ 0\leq k\leq n-1,$$

et en regroupant les termes contenant les dérivées de même ordre, on obtient:

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)} &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)}\right)'=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(n-k+1)}g^{(k)}+f^{(n-k)}g^{(k+1)}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(n+1-k)}g^{(k)}.\end{aligned}$$

■

Exemple 28. *Calculons $\left(x^4\sin x\right)^{(4)}$. On a, d'après la formule de Leibnitz :*

$$\begin{aligned}
\left(x^4 \sin x\right)^{(4)} &= \\
&= \left(x^4\right)^{(4)} \sin x + \binom{4}{1} \left(x^4\right)^{(3)} \sin' x + \binom{4}{2} \left(x^4\right)^{(2)} \sin'' x + \binom{4}{3} \left(x^4\right)' \sin^{(3)} x + x^4 \sin^{(4)} x \\
&= 24 \sin x + 4.24x \cos x + 6.12x^2(-\cos x) + 4.4x^3 \sin x \\
&= \left(24 - 72x^2 + x^4\right) \sin x + \left(96x - 16x^3\right) \cos x.
\end{aligned}$$

1.3.7 Théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables

Dans ce paragraphe, on établira une série de résultats classiques fondamentaux sur les fonctions dérivables, sous forme de théorèmes, qui permettront d'étudier les fonctions de manière plus précise à savoir leur comportement sur un intervalle ou au voisinage d'un point, le calcul de certaines limites , la recherche des extrémums d'une fonction etc.

Théorème de Fermat

Théorème 1.32. *Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle ouvert $I =]a, b[$. Si f atteint son maximum ou son minimum en un point $c \in]a, b[$, alors $f'(c) = 0$.*

Preuve. Supposons que $f(c) = \max\limits_I f$. Pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $c + h \in I$, on a:

$$f(c + h) \leq f(c).$$

Si $h > 0$, alors:

$$0 \geq \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \underset{h \to 0+}{\longrightarrow} f'_+(c).$$

D'où

$$f'_+(c) \leq 0.$$

Si $h < 0$, alors :

$$0 \leq \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \underset{h \to 0-}{\longrightarrow} f'_-(c).$$

D'où $f'_-(c) \leq 0$. Comme f est dérivable en c, alors : $f'(c) = f'_+(c) = f'_-(c)$ est à la fois positif et négatif, donc $f'(c) = 0$.

La démonstration est analogue si $f(c) = \min\limits_I f$. ∎

Théorème de Rolle

Comme conséquence du théorème de Fermat, on a le théorème de Rolle suivant qui est à la base de nombreux théorèmes , du calcul différentiel et ses applications.

Théorème 1.33. *Soit f une fonction vérifiant les conditions suivantes:*
1) f est définie et continue sur le segment $[a,b]$;
2) f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$;
3) $f(a)=f(b)$.
Alors il existe un point $c\in\,]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

Preuve. Comme f est continue sur le segment $[a,b]$, alors, d'après le deuxièeme théorème de Weirstrass (voir chapitre VI, §6, point 23), elle atteint son maximum et son minimum sur $[a,b]$. Posons $m=\min\limits_{[a,b]}f$ et $M=\max\limits_{[a,b]}f$. On a deux cas possibles:
1^o) $m=M=f(a)=f(b)$ et alors dans ce cas f est constante sur $[a,b]$, d'où $f'(x)=0,\ \forall x\in[a,b]$.
2^o) $m<M$ et alors $f(a)\neq m$ ou $f(a)\neq M$. Comme $f(a)=f(b)$, il existe donc $c\in\,]a,b[$ tel que $f(c)=m$ ou $f(c)=M$. D'après le théorème de Fermat, on a alors : $f'(c)=0$. ■

Géométriquement, le théorème de Rolle signifie que le graphe de f admet au point $(c,f(c))$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses Ox.

Formule généralisée des accroissements finis

Comme conséquence du théorème de Rolle, on a le théorème de Cauchy suivant, connu sous le nom de la formule généralisée des accroissements finis qui est importante par certaines de ses applications qu'on verra par la suite.

Théorème 1.34. *Soient f,g deux fonctions vérifiant les conditions suivantes:*
1) *f et g sont définies et continues sur le segment $[a,b]$;*
2) *f et g sont dérivables sur l'intervalle ouvert $]a,b[$;*
3) *$g'(x)\neq 0$, $\forall x\in\,]a,b[$;*
4) *$g(a)\neq g(b)$.*
Alors il existe un point $c\in\,]a,b[$ tel que :

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{1.3.1}$$

La formule 1.3.1 *est appelée* ***formule généralisée des accroissements finis.***

Preuve. Soit la fonction auxilliaire $h(x) = f(x) + \lambda g(x),\ \lambda \in \mathbb{R}$. Il est clair que h est définie et continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Pour pouvoir appliquer le théorème de Rolle pour la fonction h, il suffit de choisir λ tel que $h(a) = h(b)$. De cette dernière égalité, on tire :

$$\lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Donc , il existe $c \in\ ]a, b[$ tel que $h'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0$, d'où la formule (32).
■

Formule de la moyenne

Comme cas particulier de la formule généralisée des accroissements finis, on a la formule de la moyenne qui a de nombreuses applications théoriques et pratiques, permettant d'établir certaines propriétés des fonctions et certains résultats du calcul approché.

Théorème 1.35. (*de Lagrange*) *Soit f une fonction vérifiant les conditions suivantes :*
1) f est définie et continue sur $[a, b]$;
2) f est dérivable sur $]a, b[$;
Alors il existe un point $c \in\ ]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{1.3.2}$$

Preuve. C'est une conséquence de la formule généralisée des accroissements finis en posant $g(x) = x$. ■

La formule 1.3.2 est appelée **formule de la moyenne** ou **formule de Lagrange** ou **formule des accroissements finis.**

Remarque 1.35. *1) Elle peut s'écrire d'une autre façon qui est plus commode quelquefois. Comme $c \in\ ]a, b[$, alors il existe un nombre $\theta,\ 0 < \theta < 1$, tel que $c = a + \theta(b - a)$. Dans ce cas, la formule de la moyenne s'écrit:*

$$f(b) - f(a) = f'\left(a + \theta(b - a)\right).(b - a),\ 0 < \theta < 1. \tag{1.3.3}$$

2) Géométriquement, la formule de la moyenne signifie que la courbe (C) d'équation $y = f(x),\ x \in [a, b]$ admet au point $M(c, f(c))$ une tangente T parallèle à la corde passant par les points $A(a, f(a)$ et $B(b, f(b))$.

Parmi les applications immédiates du théorème de la moyenne, on a les corollaires suivants.

Corollaire 1.6. *Si f est dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, alors, pour tous $x_1, x_2 \in I$, il existe un point c compris entre x_1 et x_2 tel que : $f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2)$.*

Preuve. On applique le théorème de Lagrange à f sur les segments $[x_1, x_2]$ ou $[x_2, x_1]$. ■

Corollaire 1.7. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Alors f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0, \forall x \in I$.*

Preuve. Si f est constante, alors il est clair que sa dérivée est nulle partout. Inversement, supposons que $f' \equiv 0$ sur I. Montrons que $\forall x_1, x_2 \in I,\ f(x_1) = f(x_2)$. Soient, donc, $x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2$, quelconques. Alors f vérifie les conditions du théorème de Lagrange sur le segment $[x_1, x_2]$, donc il existe $c \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. Or $f'(c) = 0$, d'où $f(x_2) - f(x_1) = 0$. Comme x_1, x_2 sont arbitraires, alors on a $f(x_1) = f(x_2), \forall x_1, x_2 \in I$, c'est à dire que f est constante sur I. ■

Remarque 1.36. *Une des conséquences du corollaire 2 est que deux fonctions f, g dérivables sur un intervalle I sont égales si et seulement si $f'(x) - g'(x) = 0, \forall x \in I$ et coïncident en un point de I. Par exemple, les fonctions $y = \arcsin x$ et $y = \frac{\pi}{2} - \arccos x$ coïncident sur $I =]-1, 1[$. En effet, on a :*

$$(\arcsin x)' - (\frac{\pi}{2} - \arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0,\ \forall x \in I.$$

Donc $\arcsin x + \arccos x = c,\ -1 < x < 1$. *Comme* $\arcsin 0 + (\frac{\pi}{2} - \arccos 0) = 0 + (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) = 0$, *alors :*

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}\ ,\ -1 < x < 1.$$

Cet exemple montre que, grâce à ce corollaire, les démonstrations concernant certaines égalités entre les fonctions sont simplifiées.

Corollaire 1.8. *Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $I = (a, b)$ et dérivable sur $]a, b[$. Pour que f soit croissante (resp. décroissante) sur I , il faut et il suffit que $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) , $\forall x \in I$.*

Preuve. Supposons que f est croissante sur I et soit $x_0 \in]a, b[$. Si $x > x_0$, alors $f(x) \geq f(x_0)$, et on a :

$$0 \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{x \to x_0+}{\longrightarrow} f'_+(x_0) \geq 0.$$

Comme f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0) = f'_+(x_0) \geq 0$.
Inversement, supposons que $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in]a,b[$. Soient $x_1, x_2 \in]a,b[$, $x_1 < x_2$. Alors, d'après la formule de la moyenne sur $[x_1, x_2]$, il existe $c \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. Comme par hypothèse $f'(c) \geq 0$ et $x_2 - x_1 > 0$, alors : $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, c'est à dire que f est croissante sur I.
La démonstration est analogue si f est décroissante. ■

Remarque 1.37. *1) Les conditions citées dans les théorèmes précédents sont toutes essentielles. Si l'une d'elles n'est pas vérifiée, alors le théorème s'avère faux. Par exemple, la fonction définie par:*

$$f(x) = \begin{cases} x \;\; si \;\; 0 \leq x < 1/2 \, , \\ 1 - x \; si \; 1/2 \leq x \leq 1 \, . \end{cases}$$

(voir figure), est continue sur $[0,1]$, et $f(0) = f(1) = 0$, mais en aucun point de $]0,1[$, on n'a $f'(x) = 0$. C'est à dire que le théorème de Rolle n'est pas vérifié. Cela est dû au fait que la fonction f n'est pas dérivable au point $x = \dfrac{1}{2}$, donc elle n'est pas dérivable sur tout $]0,1[$. A titre d'exercice, le lecteur peut trouver des contre-exemples pour chaque théorème si une des conditions n'est pas satisfaite.
2) D'après le théorème de la moyenne, l'accroissement total Δy de la fonction f correspondant à l'accroissement Δx en $x_0 \in]a,b[$ s'écrit :

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta \Delta x).\Delta x, \;\; 0 < \theta < 1 \qquad (1.3.4)$$

Cette égalité donne une expression exacte de l'accroissement Δy de la fonction f en x_0, alors que la différentielle de f en x_0 est une approximation de cet accroissement. Cependant, dans la formule (35) , la difficulté réside dans le fait que le nombre θ ou $x_0 + \theta \Delta x$ n'est pas connu généralement, contrairement à la différentielle de f.

1.3.8 Applications au calcul des limites.

Limite d'une dérivée

Théorème 1.36. *Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$ $(b > a)$ et dérivable sur $]a,b[$. Si la limite à droite de la fonction dérivée f' en a (resp. à gauche en b) existe , alors la dérivée à droite en a (resp. à gauche en b) existe et on a :*

$$f'_+(a) = f'(a+0) \;\; (resp. \; f'_-(a) = f'(a-0)).$$

Preuve. Soit $h > 0$ tel que $a + h < b$. Sachant que f est dédivable sur $]a, b[$, on a, d'après la formule de la moyenne :

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{f'(a+\theta h).h}{h} = \lim_{h\to 0+} f'(a+\theta h) = f'(a+0).$$

car $a + \theta h \longrightarrow a$ quand $h \to 0_+$.
La démonstration est analogue pour l'autre cas. ■

Remarque 1.38.

$$f \in C^1[a,b] \Longleftrightarrow \begin{cases} 1)\ f \in C[a,b], \\ 2)\ f \in C^1\,]a,b[\\ 3)\ f'(a+0),\ f'(b-0)\ \textit{existent.} \end{cases}$$

Exemple 29. *Soit la fonction* $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1, 1]$. *Pour tout* $x \in]-1, 1[$ *, on a :*

$$f'(x) = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x.$$

Pour le calcul des dérivées en $x = -1$ *et* $x = 1$ *, on applique le théorème précédent, à savoir:*

$$f'_+(-1) = f'(-1+0) = \lim_{x\to -1+0} f'(x) = \lim_{x\to -1+0} \arcsin x = -\frac{\pi}{2}\ ;$$
$$f'_-(1) = f'(1-0) = \lim_{x\to 1-0} f'(x) = \lim_{x\to 1-0} \arcsin x = \frac{\pi}{2}\ .$$

Limites de rapport de fonction.

Théorème 1.37. *Soient* f, g *deux fonctions définies et dérivables dans un voisinage* V *de* $x_0 \in \mathbb{R}$ *avec* $g'(x) \neq 0,\ \forall x \in V$ *. Si la limite suivante :*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\ ,$$

existe, alors on a :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Preuve. Soit $x \in V$. Comme $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in V$, alors $g(x) \neq g(x_0)$. D'après la formule généralisée des accroissements finis , il existe un point c compris entre x et x_0 tel que l'on ait:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\ .$$

Si $x \to x_0$, alors $c \to x_0$, d'où la formule (36). ■

Première règle de L'Hospital. Limite de la forme $\dfrac{0}{0}$

Théorème 1.38. (Première règle de L'Hospital) *Soient f, g deux fonctions définies et dérivables dans un voisinage pointé V de $x_0 \in \mathbb{R}$ telles que:*

1) $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ *sur* V ,

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$.

Si la limite suivante : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *existe, finie ou infinie, alors on a :*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Preuve. C'est une conséquence du théorème précédent en prolongeant f et g en x_0 par $f(x_0) = g(x_0) = 0$. ■

Remarque 1.39. ***1)*** *La première règle de L'Hospital est vraie lorsque* $x \to x_{0+}$, $x \to x_{0-}$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$. *Pour démontrer le cas où* $x_0 = \pm\infty$, *il suffit de faire un changement de variable en posant* $t = \dfrac{1}{x}$ *et, alors on a* $x \to \pm\infty \Longleftrightarrow t \to 0$.

2) *Si, dans les conditions du théorème,* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *n'existe pas, alors on ne peut rien dire de la limite* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

3) *Une des principales erreurs dans l'application de la règle de L'Hospital consiste à écrire la formule (37) avant d'avoir établi l'existence de la limite dans le second membre. D'après la remarque 2),* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *peut ne pas exister, alors que* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *peut exister. Ainsi, si l'on veut appliquer la règle de L'Hospital, il faut d'abord s'assurer de l'existence de* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

4) *Si* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{0}{0}$, *et si les fonctions* f' *et* g' *vérifient les conditions du théorème, alors on peut répéter la règle. En général, on peut la répéter autant de fois si les conditions sont vérifiées pour les fonctions dérivées d'ordres supérieurs.*

Exemple 30. ***1)*** *Avec la règle de L'Hôpital, certaines limites remarquables deviennent faciles à calculer. Ainsi, la limite* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{0}{0}$ *(F.I.) est égale à* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sin x)'}{x'} = \lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$.

2) *Calculer* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx - x}{x - \sin x} = \dfrac{0}{0}$ *(F.I). Les fonctions* $f(x) = tgx - x$ *et* $g(x) = x - \sin x$ *vérifient les conditions du théorème et* $g'(x) = 1 - \cos x \neq 0$ *dans un voisinage de 0 et si* $x \neq 0$. *On a alors :*

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \frac{0}{0} \quad F.I.$$

On peut appliquer une deuxième fois la première règle de L'Hospital aux fonctions f' *et* g'. *Seulement, dans cet exemple, il est préférable de calculer cette limite en faisant quelques transformations trigonométriques comme suit :*

$$\frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \frac{1}{\cos^2 x}.\frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \frac{1 + 1}{1} = 2.$$

D'où, d'après la formule (37):

$$\lim_{x \to 0} \frac{tgx - x}{x - \sin x} = 2.$$

Cet exemple montre qu'on peut, pour la simplicité et la commodité, combiner les méthodes. Signalons que si l'on veut appliquer uniquement la règle de L'Hospital, alors il faut la répéter trois fois de suite. Ce qui n'est pas très judicieux.

Deuxième règle de L'Hospital. Limite de la forme $\dfrac{\infty}{\infty}$

Théorème 1.39. *Soient* f, g *deux fonctions définies et dérivables dans un voisinage pointé* V

de x_0*(fini ou infini) telles que :*

1) $g'(x) \neq 0$ *sur* V ;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty.$

Si la limite suivante : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ *existe , finie ou infinie, alors on a :*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Preuve. Donnons un autre type de démonstration qui regroupe les cas où x_0 peut être fini ou infini. Soit (x_k) une suite réelle convergente vers x_0 $(x_k \neq x_0, \ k = 1, 2, \ ...)$. Montrons que $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{f(x_k)}{g(x_k)} = L$. D'après les conditions 2) sur f et g , en posant $A_k = k\,|f(x_k)|$, $B_k = k\,|g(x_k)|$, pour tout entier naturel k, il existe $n_k \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait : $n_k > k$, $n_k < n_{k+1}$ et :

$$|f(x_{n_k})| > A_k = k\,|f(x_k)|\,, \quad |g(x_{n_k})| > B_k = k\,|g(x_k)| \quad (k = 1, 2, \ ... \ ).$$

Par conséquent, on a :

$$f(x_k) = o(f(x_{n_k})) \text{ et } g(x_k) = o(g(x_{n_k})) \ (\ k \longrightarrow +\infty).$$

d'où , d'après les théorèmes 3 et 4, chapitre V, §7, point 19, on tire:

$$\frac{f(x_{n_k})}{g(x_{n_k})} \sim \frac{f(x_{n_k}) - f(x_k)}{g(x_{n_k}) - g(x_k)} \quad (k \to +\infty).$$

D'après la formule généralisée des accroissements finis, il existe ξ_k compris entre x_k et x_{n_k} tel que l'on ait :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_{n_k})}{g(x_{n_k})} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_{n_k}) - f(x_k)}{g(x_{n_k}) - g(x_k)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \ ,$$

car si $k \to +\infty$, alors $x_k \to x_0$ et $x_{n_k} \to x_0$, ainsi que $\xi_k \to x_0$. On vient de montrer que de toute suite $\left(\dfrac{f(x_k)}{g(x_k)}\right)$, on peut extraire une sous-suite $\left(\dfrac{f(x_{n_k})}{g(x_{n_k})}\right)$ convergente vers une même limite L. Par conséquent, on a :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'x)}{g(x)} = L.$$

■

Remarque 1.40. *1) La règle reste vraie si $x \to x_{0+}$ ou $x \to x_{0-}$.*
2) On peut faire une démonstration analogue pour démontrer la première règle de L'Hospital pour les deux cas où x_0 est fini ou infini.
3) Si la limite $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ n'existe pas, alors on ne peut rien dire sur la limite $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.
4) On peut répéter la deuxième règle de L'Hospital autant de fois qu'il faut si ,à chaque étape, on a la forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Exemple 31. *1)* $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{e^x} = \dfrac{\infty}{\infty}$ *(F.I.). Les fonctions $f(x) = x$ et $g(x) = e^x$ vérifient les conditions du théorème au voisinage de l'infini et on a :*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x'}{(e^x)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Plus généralement, $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^n}{e^x} = \dfrac{\infty}{\infty}$ *(F.I.) , $\forall n \in \mathbb{N}$. En répétant $n-$fois la règle de L'Hôpital, on obtient:*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = ... = \lim_{x \to \infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x - \sin x}{x} = \dfrac{\infty}{\infty}$ *(F.I.). Les fonctions $f(x) = x - \sin x$ et $g(x) = x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x - \sin x)'}{x'} = \lim_{x \to \infty} (1 - \cos x)$$

qui n'existe pas. Cependant, on a :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x - \sin x}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) = 1 - 0 = 1.$$

Remarque 1.41. (Autres formes indéterminées) *Montrons à travers quelques exemples comment utiliser les règles de L'Hospital dans les cas de formes indéterminées:* $0.\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞ , ∞^0, 0^0.

Exemple 32. $\lim\limits_{x\to 0+} x\log x = 0.\infty$ *(F.I.). Cependant, on peut écrire :*

$$\lim_{x\to 0+} x\log x = \lim_{x\to 0+}\frac{\log x}{1/x} = \frac{\infty}{\infty}\ .$$

En appliquant la deuxième règle de L'Hospital pour $f(x)=\log x$ *et* $g(x)=\dfrac{1}{x}$ *, on obtient :*

$$\frac{(\log x)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'} = \frac{1/x}{-1/x^2} = -x \underset{x\to 0+}{\longrightarrow} 0.$$

D'où $\lim\limits_{x\to 0+} x\log x = 0.$

Exemple 33. *Calcul des limites du type* $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)^{\psi(x)}$, $\varphi(x)>0$ *dans un voisinage de* x_0 *. Dans ce cas, on a :*

$$\varphi(x)^{\psi(x)} = e^{\psi(x)\log\varphi(x)}$$

Comme la fonction $y=e^x$ *est continue sur* $\mathbb{R}$, *alors on a:*

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)^{\psi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)\log\varphi(x)}.$$

Par exemple, a) calculons $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = 0^0$ *(F.I.). D'après (39) , on a :*

$$\lim_{x\to 0+} x^x = e^{\lim\limits_{x\to 0+} x\log x} = e^0 = 1.$$

Calculons maintenant $I=\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\dfrac{1}{e^x-1-x}} = 1^\infty$ *(F.I.). Toujours d'après (39), on a:*

$$I = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\log(1+x^2)}{e^x-1-x}\right)}.$$

La limite qui se trouve à l'exposant est de la forme $\dfrac{0}{0}$ *(F.I.). On peut appliquer, dans ce cas, la première règle de L'Hospital . On a :*

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\log(1+x^2))'}{(e^x-1-x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{(1+x^2)(e^x-1)} = \lim_{x\to 0}2.\frac{1}{1+x^2}.\frac{x}{x} = 2,$$

car on a : $e^x-1\sim x\ \ (x\to 0)$. *D'où:* $I=e^2$.

Bibliographie

[1] Jean-Marie Monier, Analyse 1, cours et 300 exercices corrigés, $1^{ère}$ année MPSI, PCSI, PTSI. Dunod Paris, $3^{ème}$ édition, 1999.

[2] Jean-Marie Monier, Analyse 2, cours et 600 exercices corrigés, $1^{ère}$ année MPSI, PCSI, PTSI. Dunod Paris, $3^{ème}$ édition, 1999.