Série d'exercices - Intégration.

Exercice 1 *Calculer les intégrales indéfinies suivantes:*

I) à l'aide d'un calcul direct

$\boxed{1)}$ $\int \frac{\sqrt{x}-x^4e^{x^2}+x^2}{x^3}dx$; 2) $\int \frac{2^x+5^x}{10^x}\ dx$; $\boxed{3)}$ $\int \cos^2 x dx$; 4) $\int \frac{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}}\ dx$.

II) à l'aide d'un changement de variables

$\boxed{1)}$ $\int \frac{xdx}{\sqrt{x}\,(x+1)}\ \ (t=\sqrt{x})$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$; $\boxed{3)}$ $\int \frac{e^{3x}}{e^{6x}+25}\ dx$; 4) $\int \frac{dx}{x\ln x}$.

III) à l'aide de l'intégration par parties

$\boxed{1)}$ $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\ dx$; 2) $\int \ln\left(1+x^2\right)\ dx$; $\boxed{3)}$ $\int x^2\cos^2 x\ dx$; 4) $\int (\ln x)^2\ dx$.

IV) Fractions rationnelles

$\boxed{1)}$ $\int \frac{x}{(x+1)(2x+1)}dx$; 2) $\int \frac{x}{x^3-1}dx$; $\boxed{3)}$ $\int \frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)}\ dx$; 4) $\int \frac{x}{x^2+2x-3}\ dx$.

$\boxed{V)}$ *Fonctions trigonométriques*

1) $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$; 2) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$; 3) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$; 4) $\int \sin^3 x\cos^4 x\ dx$.

Exercice 2 *: Calculer les intégrales définies suivantes:*

$\boxed{1)}$ $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}\ dx$; 2) $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}\ dx$; $\boxed{3)}$ $\int_1^e \frac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)}\ dx$; 4) $\int_0^{\ln 2} xe^{-x}\ dx$;

$\boxed{5)}$ $\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\ dx$; 6) $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\ dx$; $\boxed{7)}$ $\int_0^1 x\ln x dx\ dx$; 8) $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}\ dx$.

Rappels

$$\int f'(x)\,f^n(x)\,dx=\frac{1}{n+1}f^{n+1}(x)+c\ \ (n\neq -1);$$

$$\int \frac{f'(x)}{f^n(x)}dx=\frac{1}{(1-n)\,f^{n-1}(x)}+c\ \ (n\neq 1);$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+c;$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}dx=\arcsin f(x)+c=-\arccos f(x)+c;$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx=\operatorname{arctg} f(x)+c.$$