République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ M'HAMED BOUGERRA ,BOUMERDES

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Calcul intégral.

0.1 Primitive d'une fonction

Définition 0.1.1. On appelle primitive d'une fonction f sur un intervalle I toute fonction F définie et dérivale sur I, vérifiant l'équation : $F'(x) = f(x)$,

Théorème 0.1.1. *Si f admet une primitive ,alors elle en admet une infinité et si F, G sont deux primitives de f sur I alors il existe une constante $c \in \mathbb{R}$; telle que : $F(x) - G(x) = c$,*

Exemple

$F(x) = cosx$ est une primitive de $f(x) = -sinx$ car $F'(x) = -sinx = f(x)$

0.2 Les intégrales indéfinies

Définition 0.2.1. On appelle intégrale indéfinie de f sur un intervalle I l'ensemble des primitives de f sur I, si elles existent notée : $\int f(x)dx$

Si F est une primitive de f alors on écrit : $\int f(x)dx = F(x) + c; c \in \mathbb{R}$

Théorème 0.2.1. *Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle .*

Conséquence

Les fonctions élémentaires réelles admettent toutes des primitives.

Exemples

1) $\int cosxdx = sinx + c$
2) $\int sinxdx = -cosx + c$
3) $\int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c$
4) $\int e^x dx = e^x + c$
5)$\int sinxdx = -cosx + c$

0.2.1 Propriétes

1)$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
2)$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx; \forall \lambda \in \mathbb{R}$
3)$(\int f(x)dx)' = f(x)$
4)$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$
5)$\int f'e^f = e^f + c$

0.2.2 Méthode d'intégration

Méthode direct

Exemples

1)$\int \frac{1}{3x+1}dx = \int \frac{1}{3}\frac{3}{3x+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3}{3x+1}dx$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{3x+1}dx &= \int \frac{1}{3}\frac{3}{3x+1}dx \\ &= \frac{1}{3}\int \frac{3}{3x+1}dx \\ &= \frac{1}{3}\int \frac{(3x+1)'}{3x+1}dx \\ &= \frac{1}{3}\ln|3x+1| + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int (sinx - 2x^2 + \sqrt{x} + \frac{3}{1+x^2})dx &= \int sinxdx - 2\int x^2dx + \int \sqrt{x}dx + 3\int \frac{dx}{1+x^2} \\ &= cosx - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 3arctgx + c\end{aligned}$$

Méthode de changement de variable

Soit à calculer $\int f(x)dx$ qui peut se mettre sous la forme $\int f(x)dx = \int g(h(x))h'(x)dx$ telle que g admet une primitive G, alors d'aprés , on pose $t = h(x); dt = h'(x)dx$

Dans ce cas on a :

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int g(t)dt \\ &= G(t) + c \\ &= G(h(x)) + c\end{aligned}$$

Exemple

1) $\int \sqrt{sinx}cosxdx = \int \sqrt{sinx}(sinx)'dx$

on pose $t = sinx$ alors $dt = cosxdx$ et on obtient

$$\begin{aligned}\int \sqrt{sinx}cosxdx &= \int \sqrt{sinx}(sinx)'dx \\ &= \int \sqrt{t}dt \\ &= \frac{(2}{3}t^{\frac{3}{2}} + c \\ &= \frac{(2}{3}(sinx)^{\frac{3}{2}} + c\end{aligned}$$

2) $\int \frac{(arctgx)^2}{1+x^2}dx$
on pose $t = arctgx$ alors $dt = (arctgx)'dx = \frac{1}{1+x^2}dx$ et on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{(arctgx)^2}{1+x^2}dx &= \int t^2dt \\ &= \frac{1}{3}t^3 + c \\ &= \frac{1}{3}(arctgx)^3 + c\end{aligned}$$

Intégration par parties

Théorème 0.2.2. *Soient f, gdeux fonctions dérivables sur I ($\subset \mathbb{R}$) telle que la fonction fg' admet une primitive sur I alors :*
$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g(x)dx$

Exemple

1) $I_1 = \int xarctgxdx$
on pose $f(x) = arctgx$ et $g'(x) = xdx$ alors :
$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}dx$ et $g(x) = \frac{x^2}{2}$

$$\begin{aligned}I_1 = \int xarctgxdx &= \frac{x^2}{2}arctgx - \int \frac{x^2}{2(1+x^2)}dx \\ &= \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1+1}{x^2+1}dx \\ &= \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}\int (1 - \frac{1}{x^2+1})dx \\ &= \frac{x^2+1}{2}arctgx - \frac{x}{2} + c \\ &= \frac{1}{3}(arctgx)^3 + c\end{aligned}$$

1) $I_2 = \int x^3lnxdx$

on pose $f(x) = lnx$ et $g'(x) = \frac{1}{4}x^4dx$ alors :
$f'(x) = \frac{1}{x}dx$ et $g(x) = \frac{x^2}{2}$

$$\begin{aligned} I_2 = \int x^3 lnx dx &= \frac{1}{4}x^4 lnx - \int \frac{1}{4}x^4 dx \\ &= \frac{1}{4}x^4 lnx - \frac{1}{4}\int x^3 dx \\ &= \frac{1}{4}x^4 lnx - \frac{1}{16}x^4 + c \\ &= \frac{1}{4}x^4(lnx - \frac{1}{4}) + c \end{aligned}$$

0.2.3 Intégration des fractions rationnelles

Soit a calculer $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ avec :

P polynome de degré n et Q polynome de degré m.

Premier cas : $n \geq m$ (Fraction irrégulière)

On doit effectuer la division Euclidienne

$\frac{P(x)}{Q(x)} = S + \frac{P'}{Q}$, le degré de $P' <$ le degré de Q

et on a : $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int S(x)dx + \int \frac{P'(x)}{Q(x)}dx$

Deuxième cas : $n < m$ (Fraction régulière)

On doit décomposer la fraction rationnelle en une sommme d'élément simples .

En décomposant une fraction rationnelle en éléments simples , on se ramène au calcul d'intégrales de la forme :

$(i) \int \frac{dx}{(x-a)^k}$ ou $(ii) \int \frac{ax+b}{((x-\alpha)^2+\beta^2})^k dx, k \in \mathbb{N}$

Pour le calcul de (i), on obtient :

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \begin{cases} ln|x-a| + c & \text{si} \quad \text{k} = 1 \\ \frac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + c & \text{si} \quad \text{k} \neq 1 \end{cases}$$

Pour le calcul de (ii), on procède au changement de variable :

$t = x - \alpha$, alors $x = t + \alpha (dx = dt)$

$$\begin{aligned}
\int \frac{ax+b}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^k}dx &= \int \frac{a(t+\alpha)+b}{(t^2+\beta^2)^k}dt \\
&= \int \frac{Ct+D}{(t^2+\beta^2)^k}dt, c = a, D = a\alpha + b \\
&= C\int \frac{tdt}{(t^2+\beta^2)^k} + D\int \frac{tdt}{(t^2+\beta^2)^k}
\end{aligned}$$

$(1) = \int \frac{tdt}{(t^2+\beta^2)^k}$ et $(2) = \int \frac{tdt}{(t^2+\beta^2)^k}$

calcul de (1) :

$$\begin{aligned}
\int \frac{tdt}{(t^2+\beta^2)^k} &= \frac{1}{2}\int \frac{d(t^{2\beta^2}+\alpha)+b}{(t^2+\beta^2)^k} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{dU}{U^k}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dU}{U^k} = \begin{cases} \frac{1}{2}ln|U| + c & \text{si} \quad \text{k} = 1 \\ \frac{1}{2(1-k)U^{k-1}} + c & \text{si} \quad \text{k} \neq 1 \end{cases}$$

Avec :$U = t^2 + \beta^2$ alors

$$(1) = \begin{cases} \frac{1}{2}ln|t^2+\beta^2| + c & \text{si} \quad \text{k} = 1 \\ \frac{1}{2(1-k)(t^2+\beta^2)^{k-1}} + c & \text{si} \quad \text{k} \neq 1 \end{cases}$$

calcul de (2) :
$(2) = J_k = \int \frac{tdt}{(t^2+\beta^2)^k}$
Pour $k = 1$: $J_1 = \int \frac{tdt}{(t^2+\beta^2)^1} = \frac{1}{\beta}arctg\frac{t}{\beta} + c$
Pour $k \neq 1$:on intègre par parties , on pose :
$v = \frac{1}{(t^2+\beta^2)^k}$ et $du = dt$ donc :

$dv = \frac{-2kt}{(t^2+\beta^2)^{k+1}}$ et $u = t$ on a alors :

$$\begin{aligned}
J_k &= \int \frac{dt}{(t^2+\beta^2)^k} \\
&= \frac{t}{(t^2+\beta^2)^k} + 2k\int \frac{t^2}{(t^2+\beta^2)^{k+1}}dt \\
&= \frac{t}{(t^2+\beta^2)^k} + 2k\int \frac{t^2+\beta^2-\beta^2}{(t^2+\beta^2)^{k+1}}dt \\
&= \frac{t}{(t^2+\beta^2)^k} + 2kJ_k - 2k\beta^2\int \frac{dt}{(t^2+\beta^2)^{k+1}}
\end{aligned}$$

On a : $J_{k+1} = \int \frac{dt}{(t^2+\beta^2)^{k+1}}$

On obtient donc : $J_k = \frac{t}{(t^2+\beta^2)^k xarctgxdx} + 2kJ_k - 2k\beta^2 J_{k+1}$
D'ou la formule de récurrence : $2k\beta^2 J_{k+1} = \frac{t}{(t^2+\beta^2)^k} + (2k-1)J_k$
avec $J_1 = \frac{1}{\beta}arctg\frac{t}{\beta} + c$ et $J_k = \int \frac{tdt}{(t^2+\beta^2)^k}$

On voit bien que le calcul de $J_k$se fait de proche en proche, en commencant par J_1, J_2, ... grace à la formule de récurrence précédente.

Exemple

1) $I_1 = \int \frac{dx}{(1-x)(1+x^2)}$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{dx}{(1-x)(1+x^2} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-x} + \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+1)}dx \\
&= -\frac{1}{2}ln|1-x| + \frac{1}{4}ln(x^2+1) + \frac{1}{2}arctgx + c
\end{aligned}$$

1) $I_2 = \int \frac{xdx}{(x^2+2x+5)}$ de la forme (ii)

$x^2+2x+5 = (x+1)^2 - 1 + 5 = (x+1)^2 + 2^2$, on pose $t = x+1$ alors $x = t-1$ et $dx = dt$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{t-1}{(t^2+2^2)^2}dt \\
&= \int \frac{t}{(t^2+4)^2}dt - \int \frac{ft}{(t^2+4)^2}dt
\end{aligned}$$

$(1) = \int \frac{t}{(t^2+4)^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{(t^2+4)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{(t^2+4)'}{(t^2+4)^2} = -\frac{1}{2(t^2+4)} + c$
$(2) = J_2 = \int \frac{dt}{(t^2+4)^2}dt$ avec $\beta = 2$ et $k = 1$
alors : $2.(2)^2 J_2 = \frac{t}{(t^2+4)^2} + (2-1)J_1$

et $J_1 = \int \frac{dt}{t^2+4} dt = \frac{1}{2} arctg \frac{t}{2}$

$J_2 = \frac{1}{8} \frac{t}{(t^2+4)^2} + \frac{1}{16} arctg \frac{t}{2}$
Finalement :$I_2 = -\frac{1}{2((x+1)^2+4)} - \frac{1}{8} \frac{(x+1)}{((x+1)^2+4)^2} + \frac{1}{16} arctg \frac{(x+1)}{2}$

0.2.4 Intégrales se ramenant à des intégrales de fonctions rationnelles

(1)$\int R(e^x)dx$

R est une fonctions rationnelle .

Exemple

$I = \int \frac{e^x+1}{(e^{2x}+1)^2} dx$ pour le calcul, il suffit de poser $t = e^x \Longrightarrow x = lnt \Longrightarrow dx \frac{dt}{t}$ donc :

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^x+1}{(e^{2x}+1)^2} dx &= \int \frac{t+1}{t(t^2+1)^2} dx \\
&= \int \frac{a}{t} dt + \int \frac{bt+c}{t^2+1} dt + \int \frac{et+f}{(t+1)^2} dt \\
&= \int \frac{1}{t} dt + \int \frac{-t-\frac{5}{2}}{t^2+1} dt + \int \frac{-t+6}{(t+1)^2} dt
\end{aligned}$$

(2)$\int R(cosx, sinx)dx$

R est une fonctions rationnelle .
Le changement de variable $t = tg\frac{x}{2}$ ramène toujours ce type d'intégrale à des intégrales de fonction rationnelle en utilisant les formules suivantes :

$$\begin{cases} sinx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \\ \\ cosx = \frac{1+tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

et $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$, $t = tg\frac{x}{2} \Longrightarrow 2arctgt = x \Longrightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt$

Exemple

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+cosx} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \\ &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1+t^2 1-t^2}{1+t^2}} \\ &= \int dt = t + c = tg\frac{x}{2} + c\end{aligned}$$

Remarque

Dans certains cas, on peut utiliser des changements de variable. mais adaptés et conduisent à des calculs plus simples

a) $\int R(cosx)sinxdx$

On pose $t = cosx \Longrightarrow -dt = sinxdx$

Exemple

$$\begin{aligned}\int \frac{sinx}{1+cosx^2}dx &= \int \frac{-dt}{1+t^2} \\ &= -arctgt + c \\ &= -arctg(cosx) + c\end{aligned}$$

b) $\int R(sinx)cosxdx$

On pose $t = sinx \Longrightarrow dt = cosxdx$

Exemple

$$\begin{aligned}\int \frac{cosx}{sinx^2-1}dx &= \int \frac{dt}{t^2-1} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1} \\ &= \frac{1}{2}(log|\frac{t-1}{t+1}| + c \\ &= \frac{1}{2}(log|\frac{sin-1}{sinx+1}| + c\end{aligned}$$

c) $\int R(tgx)dx$ **ou** $\int R(sinx, cosx)dx$

Avec $sinx$ et $cosx$ figurent seulement avec des puissances paires , on pose alors :

$t = tgx$ et on utilise les formules :

$x = arctgt, cos^2x = \frac{1}{1+tg^2x}, sin^2x = \frac{tg^2x}{1+tg^2x}$, alors :

$cos^2x = \frac{1}{1+t^2}, sin^2x = \frac{t^2}{1+t^2}, dx = \frac{dt}{1+t^2}$

Exemples

(1) $\int \frac{1+tg^2x}{1+tgx}dx$

$$\begin{aligned}\int \frac{1+tg^2x}{1+tgx}dx &= \int \frac{t^2+1}{t}\frac{dt}{t^2+1} \\ &= \int \frac{dt}{t} \\ &= ln|t| + c \\ &= ln|tgx| + c\end{aligned}$$

(2) $\int \frac{dx}{1+cos^2x}dx$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+cos^2x}dx &= \int \frac{dt}{(t^2+1)(1+\frac{1}{t^2+1})} \\ &= \int \frac{dt}{t^2+2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}} + c \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\frac{tgx}{\sqrt{2}}) + c\end{aligned}$$

(3) $\int R(chx, shx)dx$

R est une fonctions rationnelle .

Puisque chx et shx s'exriment en fonction de e^x , on peut donc se ramener au cas (1) et puis poser $t = e^x$

On a aussi des méthodes analogues à celles du cas (2), ainsi on posant $t = th(\frac{x}{2})$ on peut se ramener à l'intégral d'une fraction rationnelle en utilisant les formules :

$shx = \frac{2t}{1-t^2}, chx = \frac{1+t^2}{1-t^2}, dx = \frac{2dt}{1-t^2}$

On a aussi pour les cas particuliers :

a) $\int R(chx)shxdx$**, on pose** $t = chx$

b) $\int R(shx)chxdx$ **, on pose** $t = shx$

c) $\int R(thx)dx$ **ou** $\int R(chx, shx)dx$

Avec chx et shx figurent seulement avec des puissances paires , on pose alors :

$t = thx$ et on utilise les formules suivantes :

$ch^2x = \frac{1}{1-t^2}, sh^2x = \frac{t^2}{1-t^2}, dx = \frac{dt}{1-t^2}$

(3) $\int R(x, \sqrt{x^2+2})dx$

R est une fonctions rationnelle .

On pose $x = sht$, on a alors $dx = chtdt$ et l'intégrale devient $\int R(sht, cht)dt$ et on calcule commme dans (3).

Exemple

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+1}}dx &= \int \frac{chtdt}{sht+cht} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{e^{2t}+1}{e^{2t}}dt \\
&= \frac{1}{2}\int (1+\frac{1}{e^{2t}})dt \\
&= \frac{1}{2}t + \int \frac{1}{u^2}\frac{du}{u}, (u = e^t) \\
&= \frac{1}{2}t - \frac{1}{2u^2} + c \\
&= \frac{1}{2}arctgt - \frac{1}{2e^{2arctgt}} + c
\end{aligned}$$

On peut aussi poser $x = tgt$

0.3 Intégrale définie

Soit f une fonction définie et continue sur $[a, b]$

Définition 0.3.1. Si $F'(x) = f(x)$ (F est une primitive de la fonction $f(x)$.

$F(b) - F(a)$ s'appelle l'intégrale définie de la fonction $f(x)$ entre les bornes a et b et on écrit :$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$

Donc $\int_a^b f(x)dx$ est l'intégrale définie de la fonction $f(x)$ entre les bornes a et b

Si la fonction $f(x)$ est continue sur $[a, b]$ elle est intégrable sur $[a, b]$ c'est -à-dire $F(b) - F(a)$ existe et fini.

Théorème 0.3.1. *Toute fonction intégrable sur* $[a, b]$*est nécessairement bornée sur* $[a, b]$

Rmarque

La réciproque est fausse

Théorème 0.3.2. *Toute fonction mnotone sur* $[a, b]$ *est intégrable sur* $[a, b]$

Propriétés

Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ alors :

a)$f \pm g$ intégrable sur $[a, b]$

b)$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda f$ est intégrable sur $[a, b]$, et on a :

1) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$

2) $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$

3) En générale $\int_a^b f(x)g(x)dx \neq \int_a^b f(x)dx. \int_a^b g(x)dx.$

4)$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

5)$\int_a^a f(x)dx = 0.$

6)$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

Exemple

$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = [\frac{-1}{(2x^2+1)}]_0^1 = \frac{-1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

0.4 Table des primitives usuelles

Fonction f	$F(x) = \int f(x)dx$	Définie sur
$\int x^\alpha dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	$(\alpha \neq -1)$
$\int e^x dx$	$e^x + c$	$x \in \mathbb{R}$
$\int e^{\alpha x} dx$	$\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + c$	$x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}^*$
$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{lna} + c$	$x \in \mathbb{R}, (a > 0, a \neq 1)$
$\int \frac{dx}{x}$	$ln\|x\| + c$	$x \in \mathbb{R}^*$
$\int sinxdx$	$-cosx + c$	$x \in \mathbb{R}$
$\int cosxdx$	$sinx + c$	$x \in \mathbb{R}$
$\int sin(\alpha x)dx$	$-\frac{1}{\alpha} cos(\alpha x) + c$	$x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}^*$
$\int cos(\alpha x)dx$	$\frac{1}{\alpha} sin(\alpha x) + c$	$x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}^*$
$\int tgxdx$	$-ln\|cosx\| + c$	$x \in \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$
$\int ctgxdx$	$ln\|sinx\| + c$	$x \in \mathbb{R} - \{\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$\int \frac{dx}{cos^2 x}$	$tgx + c$	$x \in \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$
$\int \frac{dx}{sin^2 x}$	$-cotgx + c$	$x \in \mathbb{R} - \{\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$\int \frac{dx}{cosx}$	$ln\|tg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\| + c$	$x \in \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$
$\int \frac{dx}{sinx}$	$ln\|tg\frac{x}{2}\| + c$	$x \in \mathbb{R} - \{\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$\int shxdx$	$chx + c$	$x \in \mathbb{R}$
$\int chxdx$	$shx + c$	$x \in \mathbb{R}$
$\int thxdx$	$ln(chx) + c$	$x \in \mathbb{R}$
$\int cothxdx$	$ln\|shx\| + c$	$x \in \mathbb{R}^*$
$\int \frac{dx}{ch^2 x}$	$thx + c$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{sh^2 x}$	$-cothx + c$	$x \in \mathbb{R}^*$
$\int \frac{dx}{chx}$	$2arctg(e^x) + c = arctg(shx) + c$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{shx}$	$ln\|tg(\frac{x}{2}\| + c = arccotg(chx) + c$	$x \in \mathbb{R}^*$
$\int \frac{dx}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a} arctg(\frac{x}{a}) + c = -\frac{1}{a} arccotg(\frac{x}{a}) + c$	$x \in \mathbb{R}, (a \neq 0)$
$\int \frac{dx}{a^2-x^2}$	$\frac{1}{2a} ln\|\frac{x+a}{x-a}\| + c$	$x \in \mathbb{R} - \{-a, a\}, (a > 0)$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$argsh\frac{x}{\|a\|} + c$	$x \in \mathbb{R}, (a \neq 0)$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$arcsin\frac{x}{\|a\|} + c = -arccos\frac{x}{\|a\|} + c$	$x \in]-a, a[, (a \neq 0)$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$ln(x + \sqrt{a^2 - x^2}) + c$	$x \in \mathbb{R} - [-\|a\|, \|a\|], (a \neq 0)$