## Série d'exercices -Dévelopements Limités

N.B: **Les étudiants sont tenus de traiter les exercices, afin de se rendre compte de leurs difficultés d'assimilation du cours** ( Un corrigé de la série et des exercices du cours sera donné )

**Exercice 1** : *En utilisant la formule de Mac-Laurin, montrer*

$$\forall x > 0,\ x - \frac{1}{2}x^2 < \ln(1+x) < x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

**Exercice 2** :
[$I$] *Par la division suivant les puissances croissantes de $x$, donner le $DL(5,0)$ de la fonction*

$$f(x) = \frac{1}{2 - x^2 + x^5}$$

*Déduire la valeur de $f^{(4)}(0)$ et de $f^{(5)}(0)$.*

[$II$] *Déterminer le D.L. au voisinage de $x_0$ à l'ordre $n$, des fonctions suivantes:*

1) $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1-x}},\ x_0 = 0,\ n = 5$ ; 2) $f(x) = e^{\cos 3x},\ x_0 = 0,\ n = 4;$

3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{\cos x - 1},\ x_0 = 0,\ n = 3$ ; 4) $f(x) = \sqrt{2+\sqrt{3+x}},\ x_0 = 1,\ n = 2;$

5) $f(x) = e^{\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)},\ x_0 = 0,\ n = 2$ ; 6) $f(x) = \sqrt{2+\sqrt{3+x}},\ x_0 = +\infty,\ n = 2.$

**Exercice 3** : *En utilisant les D.L, calculer les limites suivantes:*

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\cos x - (e^x - 1)^2}{\sin^3 x}$ ; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - a^x}{x^x - a^a};$

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos(\ln x) - 1}{(e^x - e)^2}$ ; 4) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\ln(\sin x)}{(\pi - 2x)^2};$

5) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$ ; 6) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}.$

**Table des D.L des fonctions usuelles et élémentaires en $x_0 = 0$.**

1) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$; où $n! = 1.2.3...(n-1).n$;

2) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$;

3) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$;

4) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + o(x^n)$;

5) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + o(x^n)$;

6) $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2.4}x^2 + \frac{1.3}{2.4.6}x^3 - ... + (-1)^{n-1}\frac{1.3.5...(2n-3)}{2.4.6...(2n)}x^n + o(x^n)$;

7) $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + ... + (-1)^n\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}x^n + o(x^n)$;

8) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^p\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$;

9) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$;

10) $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + ...$;

11) $\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + ... + \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$;

12) $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}... - \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$;

13) $\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + ... + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$;

14) $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + ... + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$;

15) $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$;

16) $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$;

17) $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + ...$;

18) $\operatorname{argsh} x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$; où $(2n+1)!! = 1.3...(2n+1)$ et $(2n)!! = 2.4...2n$.