UMBB – Faculté des sciences – Département de mathématiques

Série d'exercices — 2019-2020 — ST

Matrices(Corrigé)

Exercice 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^t(AB) = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^t(BA) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^tA{}^tB = {}^t(BA) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad {}^tB{}^tA = {}^t(AB) = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(AB) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{A(BC)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Conclusion: (AB)C = A(BC). Le produit matriciel est associatif

Exercice 3

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = M^2M = MM^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Formule du binôme de Newton: Si A et B commutent alors :

$$(A+B)^n = \sum_0^n C_n^k A^k B^{n-k}$$

$$(A-B)^n = \sum_0^n (-1)^k C_n^k A^k B^{n-k}$$

Pour retrouver les coefficients C_n^k,, on utilise le triangle de Pascal

$$\begin{array}{lllll} C_0^0 & & & & \\ C_1^0 & C_1^1 & & & \\ C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & & \\ C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & \\ . & & & & \\ . & & & & \\ . & & & & \\ C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 . \ . \ . & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots C_n^n & \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{l} 1 \\ 1\ 1 \\ 1\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 3\ 1 \longrightarrow \text{ puissance } 3 \end{array}$$

Comme la matrice identité I commute avec toutes les matrices alors :

$$(M-I)^{\ 3} = M^0 I^3 - 3M^1 I^2 + 3M^2 I - M^3 I^0$$

$$(M^0 = I; I^n = I \quad et M^n I = M^n)$$

$$(M-I)^{\ 3} = I - 3M + 3M^2 - M^3$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -5 & -5 \\ -3 & 7 & 7 \\ -2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

M vérifie l'équation $X^3 - X^2 - 2X + 2I = 0$, en effet :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M^3 - M^2 - 2M + 2I = 0 \quad &\Longrightarrow \quad M^3 - M^2 - 2M = -2I \\ &\Longrightarrow \quad M(M^2 - M - 2I) = -2I \\ &\Longrightarrow \quad M\left[-\tfrac{1}{2}(M^2 - M - 2I)\right] = I \end{aligned}$$

De même la même manière on montre : $\left[-\frac{1}{2}(M^2 - M - 2I)\right] M = I$

Donc

$$M^{-1} = -\frac{1}{2}(M^2 - M - 2I)$$

$$M^{-1} = -\tfrac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Vérification

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
(B+I) &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$(B+I)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(B+I)^3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
(B+I)^3 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad (B+I)^2(B+I) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad (B+I)^2 B + (B+I)^2 = 0 \\
&\Longrightarrow \quad (B+I)^2 B + (B+I)(B+I) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad (B+I)^2 B + (B+I)B + (B+I) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad (B+I)^2 B + (B+I)B + B = -I \\
&\Longrightarrow \quad \left[-(B+I)^2 - (B+I) - I\right] B = I
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
(B+I)^3 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad (B+I)(B+I)^2 = 0 \\
&\Longrightarrow \quad B(B+I)^2 + (B+I)^2 = 0 \\
&\Longrightarrow \quad B(B+I)^2 + (B+I)(B+I) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad B(B+I)^2 + B(B+I) + (B+I) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad B(B+I)^2 + B(B+I) + B = -I \\
&\Longrightarrow \quad B\left[-(B+I)^2 - (B+I) - I\right] = I
\end{aligned}$$

Donc $\quad B^{-1} = \left[-(B+I)^2 - (B+I) - I\right]$

$$B^{-1} = -\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -3 \\ -7 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérification $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 2 & -3 \\ -7 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5

Déduction des déterminants sans calculs

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ la colonne 2 est nulle donc $\Delta_1 = 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ Δ_2 est le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure . $\Delta_2 = 1.2.b.1 = 2b$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ Δ_3 est le déterminant d'une matrice diagonale . $\Delta_3 = 2.\pi.(-1) = -2\pi$

$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -6 \end{vmatrix}$ $C_3 = -2C_1$ (C_i est la colonne i)

$\Delta_4 = 0$

$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ $L_1 = L_3$ (L_i est la ligne i)

$\Delta_5 = 0$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Pour le calcul de ce déterminant, on utilise le développement suivant la ligne ou la colonne qui contient le plus de zéros. On peut choisir L_2 ou L_4 ou C_2 ou C_4.

Suivant L_4 on a:

$$\Delta = +1\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\1 & 1 & 0\\2 & 0 & 1\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

On calcule les déterminants par la méthode de Sarrus

$$*)\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\1 & 1 & 0\\2 & 0 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & -1\\1 & 1 & 0 & 1 & 1\\2 & 0 & 1 & 2 & 0\end{vmatrix} = \searrow + \searrow + \searrow - \swarrow - \swarrow - \swarrow$$
$$= 1.1.1 + (-1).0.2 + 2.1.0 - (-1).1.1 - 1.0.0 - 2.1.2 = -2$$

$$**)\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & -1\\0 & 1 & 0 & 0 & 1\\1 & 0 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix}$$
$$= 1.1.1 + (-1).0.1 + 2.0.0 - (-1).0.1 - 1.0.0 - 2.1.1 = -1$$

$\Delta = -1$

Exercice 6

$$M = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 0 & -1\\0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

On calcul $detM$ par rapport a L_3

$$detM = -(-1)\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{vmatrix} = -2$$

$det^t M = detM = -2$

$det(M^{100}) = (detM)^{100} = (-2)^{100} = 2^{100}$

$det(-2M) = (-2)^3(detM) = (-2)^4 = 16$

$det(M^{-1}) = \frac{1}{detM} = -\frac{1}{2}$ (Si $detM \neq 0$)

Calcul de M^{-1} par la méthode de la comatrice:

$detM = -2 \neq 0$. M est donc inversible.

$M^{-1} = \frac{1}{\det M}{}^t(comM)$ avec $comM$ est la matrice des cofacteurs de M

$$comM = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$${}^t(comM) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\backslash 2 & 1\backslash 2 & 1\backslash 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1\backslash 2 & -1\backslash 2 & 1\backslash 2 \end{pmatrix}$$

Vérification

$$\begin{pmatrix} 1\backslash 2 & 1\backslash 2 & -1\backslash 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1\backslash 2 & -1\backslash 2 & 1\backslash 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$