Calcul matriciel et déterminants

Objectifs :

- *Savoir ce qu'est une matrice.*
- *Savoir additionner deux matrices.*
- *Savoir multiplier deux matrices.*
- *Savoir calculer le déterminant d'une matrice.*
- *Savoir calculer l'inverse d'une matrice.*

1. Les matrices ? …un tableau tout simplement !

Définition : *Une matrice de type $[n,p]$ dans $\mathbb{R}$, est un tableau d'éléments de $\mathbb{R}$, composé de n lignes et de p colonnes. On note $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$, et on représente A sous forme de tableau comme suit :*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & Colonne\ j & & & \\ & \downarrow & & & \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \leftarrow \ ligne\ i. \end{array}$$

Ainsi, dans la matrice A, le coefficient $a_{i,j}$ se trouve à la $i-ième$ ligne et à la $j-ième$ colonne .

- *L'ensemble des matrices de même type $[n,p]$ c'est-à-dire à n lignes et à p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ ou tout simplement $\mathcal{M}_{n,p}$, puisque dans ce chapitre, on considérera que les matrices à coefficients $a_{i,j}$ réels.*
- *Deux matrices sont égales si elles ont même taille et même coefficients.*

❖ *Exemples :* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,4}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}$; $C = \begin{pmatrix} \pi \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}$

Vocabulaire:

- *Si $n = p = 1$, on a simplement affaire à un nombre.*
- *La matrice nulle est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, on la note :*
  $O = 0_{n,p} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_{(n,p)}$.
- *Si $n = 1$, A est une matrice ligne.*
- *Si $p = 1$, A est une matrice colonne.*
- *Si $n = p$, A est une matrice carrée d'ordre n.*
- *On note $L_i(A) = \left(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,p}\right)$ la $ième$ ligne de A et $C_j(A) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$ la $jème$colonne de A.*

2.Opérations sur les matrices :

2.1.L'addition des matrices :

L'addition entre deux matrices est noté $+$ et n'est possible que si elles ont les mêmes dimenssions. Sinon, la somme n'existe pas. Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ deux matrices du même ensemble $\mathcal{M}_{n,p}$. On a $\boxed{A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}}$.

- *Exemple :* $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \\ 0 & \pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 7 \\ -1 & \pi + 1 \end{pmatrix}$,

  par contre la somme $\begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 28 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 9 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ *n'est pas possible.*

Propriétés de l'addition :

Soient A , B et C trois matrices appartenants au même ensemble $\mathcal{M}_{n,p}$:

- $A + B = B + A$. *(la somme est commutative)*
- $A + (B + C) = (A + B) + C$. *(la somme est asociative)*
- $A + O = O + A = A$. *(la matrice nulle O est l'élémént neutre pour l'addition des matrices).*
- $A + (-A) = O$. *On note aussi $A - A = O$, par abus de notation .*

Avec $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}$ *et* $-A = (-a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}$, *la matrice symétrique de A.*

- *Les quatres poropriétés ci-dessus font de $(\mathcal{M}_{n,p}, +)$ un groupe commutatif.*

2.2.Multiplication d'une matrice et d'un scalaire :

Définition : *Soit une matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}$ et un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$; alors on a :*

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{1,1} & \cdots & \alpha a_{1,j} & \cdots & \alpha a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{i,1} & \cdots & \alpha a_{i,j} & \cdots & \alpha a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{n,1} & \cdots & \alpha a_{n,j} & \cdots & \alpha a_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\alpha A = (\alpha a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}}.$$

- *Exemple :* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}$ *et* $\alpha = 7$ *alors* $7A = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 28 \end{pmatrix}$.

Remarques sur cette opération :

- ✓ *On ne peut pas écrire le . de multiplication ; ainsi on écrit αA plutôt que $\alpha . A$*
- ✓ *Le scalaire s'écrit toujours à gauche de la matrice. Ainsi on écrit $7A$ mais surtout pas $A7$!!*
  De même on écrit $\frac{1}{7}A$ mais surtout pas $\frac{1}{7A}$!!
- ✓ *La multiplication d'une matrice par un scalaire est une loi externe.*

Propriétés de cette opération : *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *On a :*

- $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$ *et* $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$
- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
- $1A = A$.

2.3.Multiplication des matrices : *La multiplication des matrices est une loi très particulière :*

Définition : *Soit une matrice* $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}$ *et soit* $B = \left(b_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}$. *Alors le produit de* A *par* B *est possible, on a :* $A \times B \in \mathcal{M}_{n,q}$ *et* $A \times B = \left(c_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq q}}$ *avec* $\boxed{c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}}$.

En pratique, pour éviter les erreurs de calcul, on place les deux matrices dans cette position :

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,j} & \cdots & b_{i,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k,1} & \cdots & b_{k,j} & \cdots & b_{k,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p,1} & \cdots & b_{p,j} & \cdots & b_{p,q} \end{pmatrix}}^{\boldsymbol{B}} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,j} & \cdots & a_{k,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} & \underbrace{\begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,j} & \cdots & c_{i,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{k,1} & \cdots & c_{k,j} & \cdots & c_{k,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n,1} & \cdots & c_{n,j} & \cdots & c_{n,q} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A\times B}} \end{array}$$

- *Exemple :* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *les produits* AB *et* BA *sont tous les deux possibles puisque :*

  (nombre de colonnes de A*) = (nombre de lignes de* B*)* $= 4$

  (nombre de colonnes de B) = (nombre de lignes de $A = 2$ *, on a :*

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}^{B} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}}_{A} & \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}}_{AB} \end{array} \quad et \quad \begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}}^{A} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B} & \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 & 14 \\ 5 & -1 & 2 & 13 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{BA} \end{array}$$

Ici on a pu calculer $AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $BA = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 & 14 \\ 5 & -1 & 2 & 13 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et on voit bien que* $AB \neq BA$.

Remarques importantes:

Attention le produit matriciel a des propriétés différente du produit des réels.

- ✓*On peut écrire* AB *au lieu de* $A \times B$.
- ✓*Le produit* AB *n'et pas toujours défini ; il existe à condition que le nombre de colonnes de* A *soit égal au nombre de lignes de* B. *La matrice résultat du produit, possède le nombre de lignes de* A *et le nombre de colonnes de* B.
- ✓*Ce n'est pas une loi interne exepté dans le cas particulier des matrices carrées.*
- ✓ $AB \neq BA$. *Le produit n'est pas commutatif, même dans le cas de deux matrices carrées.*
- ✓$AB = \emptyset \Longrightarrow A = 0 \; ou \; B = 0$. *Il existe* $A \; et \; B$ *non nulles telles que* $AB = 0$ *donc la règle du produit nul est fausse. Exemple :* $A = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}$ *,alors les deux produits* AB *et* BA *sont possibles et on a :* $AB = \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$ *et pourtant* $B \neq 0$ *et* $A \neq 0$.
- ✓*Si* $AB = AC$ *on ne peut pas déduire que* $A = C$.

Proposition :

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}$ $B \in \mathcal{M}_{p,q}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}$ *et* $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathcal{M}_{1,n}$.

1) $AX = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}\, x_1 + \dots + a_{1,j}\, x_j + \cdots + a_{1,p}\, x_p \\ \vdots \\ a_{i,1}\, x_1 + \dots + a_{i,j}\, x_j + \cdots + a_{i,p}\, x_p \\ \vdots \\ a_{n,1}\, x_1 + \dots + a_{n,j}\, x_j + \cdots + a_{n,p}\, x_p \end{pmatrix} = x_1 C_1(A) + x_2 C_2(A) + \cdots + x_P C_P(A).$

2) $YA = (y_1, \dots, y_i, \dots, y_n) \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} = y_1 L_1(A) + y_2 L_2(A) + \cdots + y_P L_P(A).$

3) $C_j(AB) = AC_j(B), 1 \leq j \leq q$ *et* $L_i(AB) = L_i(A).B, 1 \leq i \leq n.$

4) $C_{i,j} = L_i(A).C_j(B)$ *avec* $1 \leq i \leq n$ *et* $1 \leq j \leq q$.

Application : Ecriture matricielle d'un système linéaire :

Soit $(S) = \begin{cases} a_{1,1}\, x_1 + \dots + a_{1,j}\, x_j + \cdots + a_{1,p}\, x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{i,1}\, x_1 + \dots + a_{i,j}\, x_j + \cdots + a_{i,p}\, x_p = b_i \\ \vdots \\ a_{n,1}\, x_1 + \dots + a_{n,j}\, x_j + \cdots + a_{n,p}\, x_p = b_n \end{cases}$ *un système non homogène de taille* $n \times p$ *c.à.d :*

à n équations et à p inconues . Si on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$, on a :

$(S) \Leftrightarrow AX = B$ *et le système homogène associé est* $(H) \Leftrightarrow AX = O, avec\ O = O_{n,p}$.

Propriétés du produit matricel:

Soit A , B et C des matrices et $\alpha \in \mathbb{R}$ .Quand c'est possible on a :

- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$ *et* $(A + B)C = AC + BC$
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

4. Transposition :

Définition : *Soit $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} \in \mathcal{M}_{n,p}$. La transposée de A est la matrice définie par :*

${}^tA = \left(a_{j,i}\right)_{\substack{1 \le j \le p \\ 1 \le i \le n}} \in \mathcal{M}_{p,n}$. *(dans la pratique , les lignes de A sont les colonnes de ${}^tA$ et inversement)*

- *Exemple :* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3} \Rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}$

Propriétés: *Soient A et B deux matrice et $\alpha \in \mathbb{R}$. Quand c'est possible on a :*

1) ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$ ***2)*** ${}^t(\alpha A) = \alpha\, {}^tA$ ***3)*** ${}^t\left({}^tA\right) = A$ ***4)*** ${}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA$

5. Les matrices carrées et leurs particularités:

Définitions et propriétés :

- *On appelle matrice carrée, une matrice ayant le même nombre de lignes que de colonnes. On note $\mathcal{M}_n$, l'ensemble des matrices carrées plutôt que $\mathcal{M}_{n,n}$.*
- *Toutes les opérations précédentes restent valables sur les matrices carrées. Il existe cependant une matrice particulière appelée matrice identité, élément neutre pour la multiplications des matrices .*
- *La matrice identité est notée I_n et vérifie $\forall A \in \mathcal{M}_n,\ AI_n = I_nA = A$. On a :*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- *On peut aussi définir une puissance $n\grave{e}me$ d'une matrice carrée, par récurrence :*

$A^0 = I_n$ *et* $A^n = AA^{n-1} = A^{n-1}A$.

- *Binôme de Newton pour les matrices :Soient A , $B \in \mathcal{M}_n$ telles que A et B <u>commutent</u> c'est-à-dire $AB = BA$ $(ce\ qui\ reste\ assez\ rare)$ alors on a :* $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, (A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k}$.

  Cette formule devient fausse si les matrices ne commutent pas !

- *Si* $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n$ *; les coefficients* $a_{i,i}$ *avec* $1 \leq i \leq n$ *forment les éléments diagonaux de la matrice* A *et* $diag(A) = \left(a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{i,i}, \dots, a_{n,n}\right)$ *désigne la diagonale principale de* A.
- *Une matrice diagonale est une matrice carrée ayant tous les éléments hors de la diagonale principale nuls (* $a_{i,j} = 0, \forall\, 1 \leq i,j \leq n, i \neq j$*) et ceux de la diagonale principale sont quelconques. (Ils peuvent donc être nuls ! la matrice nulle* 0 *étant bien entendu une matrice diagonale)*

  ❖ *Exemple : la matrice* $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3$ *est une matrice diagonnale.*

- *Propriété importante à retenir :* $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \Longrightarrow A^k = \begin{pmatrix} {\alpha_1}^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & {\alpha_2}^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & {\alpha_n}^k \end{pmatrix}, \forall k \in \mathbb{N}$
- *Une matrice triangulaire supérieure est une matrice carrée ayant ces coefficients au dessous de la diagonnale tous nuls et les autres pas tous nuls :* $\forall\, i > j, a_{i,j} = 0,$ *.*

  Une matrice triangulaire inférieure c'est donc le contraire : $\forall\, j > i, a_{i,j} = 0.$

  ❖ *Exemple :* $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *est une triangulaire supérieure et* $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ \pi & 2 & 1/2 \end{pmatrix}$ *est une triangulaire inférieure .*

- *On appelle trace d'une matrice carrée* $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n$ *, la somme des éléments diagonaux. Elle est notée et définie par* $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$*. On a* $tr(A) = tr(t_A)$ *avec* t_A *la transposée de* A.

  ❖ *Exemple : Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & -5 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ *alors* $tr(A) = 1 + (-5) + 0 = -4.$

5. Inverse d'une matrice carrée:

Définition : *Soit* $A \in \mathcal{M}_n$ *une matrice carrée. On dit que la matrice* A *est inversible s'il existe une matrice,noté,* $A^{-1} \in \mathcal{M}_n$ *telle que* $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ *. On appelle* A^{-1}*inverse de la matrice* A.

Remarques :

- ✓ *Lensemble des matrices carrées d'ordre* n *est noté* GL_n.
- ✓ *On parle de matrice inverse que pour les matrices carrées, sinon, cela n'a aucun sens !*
- ✓ *Attention, toutes les matrices carrées ne possèdent pas une matrice inverse ! On verra plus loin Avec les déterminants comments savoir si une matrice carrée est inversible et comment aussi trouver son inverse au moyen des déterminants (il en existe bien d'autres méthodes, la technique de Gauss-Jordan est l'une d'elles).*

6. Déterminants et calcul de l'inverse d'une matrice:

Définition : *Soit une matrice carrée* $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *le déterminant de* A *est le réel*

noté : $detA$ *ou* $\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$.

6.1. Déterminant d'ordre 2 :

Un calcul direct donne : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb.$

- *Exemple :* $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 3(-6) - 4 \times 2 = -26$

6.2. Déterminant d'ordre 3 et (Règle de sarrus)

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + dhc - ceg - afh - bdi$ *.Ce résultat est obtenu en suivant le shéma suivant:*

$\begin{matrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{matrix}$ *et* $detA = \searrow + \searrow + \searrow - \swarrow - \swarrow - \swarrow = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi.$

On peut remarquer qu'en développant suivant la première ligne on retrouve la formule de sarrus :

$$detA = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} = a(ei - fh) - d(bi - hc) + g(bf - ec)$$

$$= aei - afh - dbi + dhc + gbf - gec.$$

- *Exemple Calcul de* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -11$ *. Par Sarrus :* $\begin{matrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 2 \end{matrix}$ *on obtient :*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1x2x(-1) + 1x5x(-1) + 3x0x2 - 3x2x(-1) - 1x5x2 - 1x0x(-1) = -11$$

Attention : *On utilise la règle de Sarrus que pour les déterminants d'ordre 3 .*

6.3. Déterminant des matrices triangulaires et diagonales :

1) $\det(0) = 0$ *2)* $det(I_n) = 1$ *3)* $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1}.a_{2,2}\ldots.a_{n,n}.$ *On a*

généralement, le calcul du déterminant d'une matrice triangulaire ou diagonnale est immédiat, il est égal au produit des éléments de la diagonale principale .

6.4. Calcul du déterminant d'ordre n :

$(*)$***NOTATIONS :*** *On note par*

- $\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$, *un determinant d'ordre quelconque* n.

- $\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$, *le determinant d'ordre* $(n-1)$ *obtenu en supprimant dans* Δ *la* i*ème ligne et la* j*ème colonne appelé mineur* ij.

  ❖ *Exemple :* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix}$ *alors* $\Delta_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 = 8.$

- $C_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$, *est le coffacteur* ij.

Formules de récurrence du déterminant Δ *suivant une rangée :*

1) *Calcul suivant la* i*ème ligne :* $\Delta = \sum_{k=1}^{p} C_{i,k}\, a_{i,k} = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{i+k} a_{i,k}\, \Delta_{ik}$.

(Ici la ligne i *reste fixe parcontre les colonnes varient)*

❖ *Exemple :* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix}$ *on calcule* Δ *suivant la ligne 2 :*

$$\Delta = \sum_{k=1}^{3} (-1)^{2+k} a_{2,k}\, \Delta_{2,k} = (-1)^{2+1} a_{2,1}\, \Delta_{2,1} + (-1)^{2+2} a_{2,2}\, \Delta_{2,2} + (-1)^{2+3} a_{2,3}\, \Delta_{2,3}$$

$$\Delta = -2\Delta_{21} + 5\Delta_{22} - 0\Delta_{22} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -2(2 \times 7 - 4 \times 3) + 5(1 \times 7 - 3 \times 0) = -2 \times 2 + 5 \times 7 = 31\ .$$

2) *Calcul suivant la* j*ème colonne :* $\Delta = \sum_{k=1}^{n} C_{k,j}\, a_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,j}\, \Delta_{k,j}$

(Ici la colonne j *reste fixe parcontre les lignes varient).*

❖ *Exemple :* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix}$ *on calcule* Δ *suivant la colonne 3 :*

$$\Delta = \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+3} a_{k,3}\, \Delta_{k,3} = (-1)^{1+3} a_{1,3}\, \Delta_{1,3} + (-1)^{2+3} a_{2,3}\, \Delta_{2,3} + (-1)^{3+3} a_{3,3}\, \Delta_{3,3}$$

$$\Delta = +3\Delta_{1,3} - 0\Delta_{2,3} + 7\Delta_{3,3} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 3\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3(2 \times 4 - 0 \times 5) + 7(1 \times 5 - 2 \times 2) = 3 \times 8 + 7 \times 1 = 31.$$

Remarque : *Le calcul du déterminant est indépendant de la ligne ou de la colonne choisie pour le développer . En pratique, on choisira la ligne ou la colonne qui contient le maximum de* 0*, pour avoir le moins de calculs possibles.*

❖ *Exemple : on aura par exemple (développement suivant la trisième ligne) :*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 16$$

Propriétés importantes :

- $\forall n \geq 2, \det I_n = 1$
- *Une matrice* A *est inversible si et seulement si* $detA \neq 0$
- $\forall A, B \in \mathcal{M}_n,\ detAB = detA\ detB$
- *Si* A *est inversible (on rappelle que cela se note* $A \in GL_n$*, alors* $detA^{-1} = \frac{1}{detA}$
- $detA = det\ {}^tA$

Règles de calcul: *On appelle rangée de* A*, toute ligne ou toute colonne de* A*. Cela permettra dans la suite de ne pas faire de répétition avec lignes et colonnes d'un déterminant ou d'une matrice. Si* Δ *est un déterminant, alors voici quelques règles simples pour calculer* Δ *:*

- *Si tous les éléments d'une rangée de* Δ *sont nuls, alors* Δ *est nul.*
- *Si l'on permute deux rangées parallèles dans* Δ *, alors on change le signe de* Δ *.*
- *Si deux rangées parallèles dans* Δ *sont proportionnelles alors* Δ *est nul.*
- *Si une rangée de* Δ *est combinaison linéaire d'autres rangées parallèles, alors* Δ *est nul.*
- *On ne modifie pas le résultat du calcul de* Δ *, lorsque l'on ajoute à une rangée, une combinaison linéaire d'autres rangées parallèles à celle-ci.*
- *Si l'on multiplie* k *rangées de* Δ *par un scalaire* α *,alors* Δ *est multiplié par* α^k *.*
  Ces différentes propriétés vont nous permettre, en utilisant certaines notations dues à Gauss, de calculer plus rapidement un déterminant.

6.5. Utilisation des déterminants pour calculer l'inverse d'une matrice:

Soit une matrice carrée $A = \left(a_{i,j}\right)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n$ *de déterminant* $detA = \Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$.

En utilisant les notation $(*)$*, on a :*

Proposition *: Soit* $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n$ *.*

A inversible si et seulement si $detA \neq 0$. Dans ce cas l'nverse A^{-1} est donnée par la formule :

$A^{-1} = \frac{1}{detA}\ {}^t(Com\ A)$, *avec* $Com\ A = \left(c_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ *est la comatrice associée à A c'esst à dire la matrice des coffacteurs* $c_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ *ou* Δ_{ij} *est le mineur ij du* $detA = \Delta$.

- *Exemple :* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ *on a calculé précédemment* $\Delta = detA = 31 \neq 0$ *alors A est inversible*

  Et $A^{-1} = \frac{1}{detA}\ {}^t(Com\ A) = \frac{1}{31}\ {}^t(Com\ A)$. *On détermine La comlatrice de A :*

$$Com\ A = \left(c_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq 3} = \left((-1)^{i+j}\Delta_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq 3} = \begin{pmatrix} +\Delta_{1,1} & -\Delta_{1,2} & \Delta_{1,3} \\ -\Delta_{2,1} & +\Delta_{2,2} & -\Delta_{2,3} \\ +\Delta_{3,1} & -\Delta_{3,2} & \Delta_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{1,1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 35\ ,\quad \Delta_{1,2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 14\ ,\quad \Delta_{1,3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

$$\Delta_{2,1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 2\ ,\quad \Delta_{2,2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 7\ ,\quad \Delta_{2,3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

$$\Delta_{3,1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -15\ ,\quad \Delta_{3,2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6\ ,\quad \Delta_{3,3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

alors, $Com\ A = \begin{pmatrix} 35 & -14 & 8 \\ -2 & 7 & -4 \\ -15 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ *et* ${}^t(Com\ A) = {}^t\begin{pmatrix} 35 & -14 & 8 \\ -2 & 7 & -4 \\ -15 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & -2 & -15 \\ -14 & 7 & 6 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}\ {}^t(Com\ A) = \frac{1}{31}\begin{pmatrix} 35 & -2 & -15 \\ -14 & 7 & 6 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35/31 & -2/31 & -15/31 \\ -14/31 & 7/31 & 6/31 \\ 8/31 & -4/31 & 1/31 \end{pmatrix}.$$

H. HADJAR