Université M'Hamed Bougara-Boumerdes
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Sciences & *Technologie*
Année universitaire: 2019/2020
Matière: *Mathématiques*

Coordination des enseignants de mathématiques de la filière ST

Notes de Cours et Exercices.

Ce cours s'adresse aux étudiants de première année S.T..

Les Développements Limités.

Symboles de Landau, comparaison de fonctions réelles.

Rappel : 0n désigne par $V(x_0)$ un voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Les voisinages usuels, sont les intervalles du type:

$$\begin{array}{lcl} V(x_0) =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[& si & x_0 \in \mathbb{R} \\ V(-\infty) =]-\infty, A[& avec & A > 0 \\ V(+\infty) =]A, +\infty[& avec & A > 0 \end{array}$$

Définitions et notations

Soient deux fonctions $f, g : I \to \mathbb{R}$ et soit x_0 tel que $x_0 \in I$ ou $x_0$est une extrêmité de I (par exemple si I=$]a, b[$ alors $x_0 \in [a, b]$) ou éventuellement x_0 vaut $\pm\infty$..

Nous supposerons ici que f et g ne s'annulent pas sur un voisinage de x_0, privé de x_0.

Comparer les deux fonctions, revient à affirmer si elles sont proches et comment elles sont proches.

Pour cela on regarde le rapport $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ au voisinage de x_0, qu'on notera $V(x_0)$.

On observe alors trois cas intéressants.

1) Le rapport $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est borné sur $V(x_0)$, on dira que f est **dominée** par g ou que g domine f, on note $f \underset{(x_0)}{=} O(g)$ qui se lit f est un grand"O" de g.

2) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, on dira que f est **négligeable** devant g sur $V(x_0)$, on note $f \underset{(x_0)}{=} o(g)$ qui se lit f est un petit"o" de g.

(Graphiquement ,cela veut dire que le graphe de f s'éloigne de celui de g.)

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$,on dira que f est **équivalente** à g sur $V(x_0)$,on note $f \underset{(x_0)}{\sim} g$.

Se dit aussi f et g sont **équivalentes** au $V(x_0)$

(Graphiquement, cela veut dire que les graphes de f et g coincident au voisinage de x_0).

Remarque:

(1) $x_0 \in I \subseteq \mathbb{R}, x_0$ peut être un point intérieur ou une extrêmité de I, éventuellement($\pm\infty$.)

(2) Dans ce cours on se limitera au petit "o".

Exemple: Considérons les fonctions

$$(1)\ \ f(x) = 3x^4 + 2x^2 \text{ et } g(x) = x \qquad ;$$

$$\text{on a bien } f \underset{(0)}{=} o(g) \text{ car } \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^4+2x^2}{x} \quad = \quad \lim_{x\to 0}(3x^3+2x) \quad = \quad 0$$

$$et$$

$$(2)\ \ f(x) = 3x^4 + 2x^2 \text{ et } g(x) = x^6 \qquad ;$$

$$\text{on a bien } f \underset{(+\infty)}{=} o(g) \text{ car } \lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^4+2x^2}{x^6} \quad = \quad \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3}{x^2}\right) \quad = \quad 0$$

Propostion: (Caractérisation de la négligeabilité)

f est négligeable devant g au voisinage de x_0, $V(x_0)$,s'il existe une fonction

ε définie sur $V(x_0)$ sauf peut être en x_0, telle que: $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon(x) = 0$

$et\ \forall x \in V(x_0), x \neq x_0, f(x) = g(x).\varepsilon(x)$.

Autrement dit: $f \underset{(x_0)}{=} o(g) \Leftrightarrow \exists\ \varepsilon, \varepsilon\colon V(x_0) \to \mathbb{R}; \lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon(x) = 0$ et $f(x) = g(x).\varepsilon(x)$.

Exemple:

$f(x) = x^2$ est négligeable devant $g(x) = \sin x$ au $V(o)$

puisque $x^2 = sinx.\dfrac{x^2}{\sin x}$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}x.\dfrac{x}{\sin x} = 0 \times 1 = 0$.

Proposition: Opérations sur les petits"o".

1) Si $f \underset{(x_0)}{=} o(g)$ et $g \underset{(x_0)}{=} o(h)$ alors $f \underset{(x_0)}{=} o(h)$.

2) Si $f \underset{(x_0)}{=} o(g)$ et $h \underset{(x_0)}{=} o(g)$ alors $f \pm h \underset{(x_0)}{=} o(g)$.

Ce qui donne pour $h = f$

$$f \pm f \underset{(x_0)}{=} o(g) \pm o(g) = o(g)$$

3) $f = o(h_1), g = o(h_2) \Rightarrow f.g = o(h_1 h_2)$ autrement dit $o(h_1).o(h_2) = o(h_1.h_2)$.

4) $f = o(g) \Rightarrow h.f = o(h.g)$ c'est à dire $h.o(g) = o(h.g)$ avec h une fonction non nulle sur $V(x_0)$.

5) $f = o(\lambda g), (\lambda \in \mathbb{R}^*) \Rightarrow f = o(g)$ c'est à dire $o(\lambda g) = \lambda o(g) = o(g)$.

Preuve;

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} \times \dfrac{g(x)}{h(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} \times \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{h(x)} = 0.$

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) + h(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} + \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{h(x)}{g(x)} = 0.$

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x).g(x)}{h_1(x).h_2(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{h_1(x)} \times \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{h_2(x)} = 0.$

(4) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{h(x).f(x)}{h(x).g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0.$

(5) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\lambda g(x)} = \dfrac{1}{\lambda} \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0.$

Remarque:

(1)Si $f \underset{(x_0)}{=} o(1)$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$. En effet: $f = o(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{1} = 0.$

(2) Attention les propriétés (2) et (5) de la proposition précédente montrent bien que $o(g)$ n'est pas le même, du fait que $o(g) \pm o(g) = o(g)$.

(3) Si $f \underset{(x_0)}{=} o(g)$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.est souvent fausse.

puisque $f(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow \exists\ \varepsilon; \lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$ et $f(x) = g(x).\varepsilon(x)$.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ signifie que $\lim\limits_{x \to x_0} g(x).\varepsilon(x) = 0$.
or celà n'est possible que si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq \infty$ car $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Exemple Montrer :pour $x_0 = 0,\ o(x^3) + 5o(x^3) = o(x^3)$.

En effet :

$$o(x^3) = x^3\varepsilon_1(x) \quad et \quad 5o(x^3) = x^3\varepsilon_2(x)$$

$$\begin{aligned} o(x^3) + 5o(x^3) &= x^3(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)) \\ &= x^3\varepsilon(x) \end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon_2(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Exercice: Montrer que $o(x^2) \underset{(0)}{=} o(x)$.

<u>**Réponse**</u>: En posant $f \underset{(0)}{=} o(x)$ et $h(x) = x$, on a: $o(x^2) = o(x.x) = x.o(x)$ et $o(x) = x.o(1)$

d'aprés 4) de la proposition précédente.

D'où

$$\lim_{x\to 0} \frac{o(x^2)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x.o(1)}{x} = \lim_{x\to 0} o(1) = 0.$$

Proposition: Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on a : $(x-x_0)^p \underset{(x_0)}{=} o\left((x-x_0)^q\right) \Leftrightarrow p > q$.

Preuve:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)^p}{(x-x_0)^q} = \lim_{x\to x_0} (x-x_0)^{p-q} = \begin{cases} 0 & si \quad p > q \\ 1 & si \quad p = q \\ \infty & si \quad p < q \end{cases}$$

d'où le résultat.

remarque: Etant donnée une fonction ε telle que $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$,

alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$(x-x_0)^n \varepsilon(x) = o((x-x_0)^n)$$

On a les résultats suivants: $\forall n, m \in \mathbb{N}$

- $o\left((x-x_0)\right)^n = o((x-x_0)^m)$ si $n \geq m$ *si* $x_0 \in \mathbb{R}$

- $o(x^n) + o(x^m) = o(x^{\max(n,m)})$ *si* $x \to \infty$
- $o(x^n) + o(x^m) = o(x^{\min(n,m)})$ *si* $x \to 0$

- $o((x-x_0)^n) \times o((x-x_0)^m) = o((x-x_0)^{n+m}) = o((x-x_0)^n) = o((x-x_0)^m)$

Comparaison des fonctions usuelles

Théorème 0.1. *: Soient $\alpha, \beta, \gamma > 0$ trois réels, les comparaisons entre les fonctions élémentaires suivantes sont comme suit:*

(1) $(lnx)^\gamma \underset{(+\infty)}{=} o(x^\alpha)$ (2) $|lnx|^\gamma \underset{(0^+)}{=} o(\frac{1}{x^\alpha})$

(3) $x^\alpha \underset{(+\infty)}{=} o(e^{\beta x})$ (4) $x^\alpha \underset{(+\infty)}{=} o(a^x), pour\ a > 1$

(5) $e^{\beta x} \underset{(-\infty)}{=} o(\frac{1}{x^\alpha}), pour\ \alpha \in \mathbb{N}$ (6) $ln^\beta x \underset{(+\infty)}{=} o(e^{\alpha x})$

(voir cours des fonctions élémentaires.)

remarque:

La notion de négligeabilité des fonctions élémentaires citées dans le théorème, permet d'évaluer la vitesse des fonctions entre elles .

Ainsi, par exemple la fonction exponentielle l'emporte sur la fonction puissance qui à son tour l'emporte sur la fonction Logarithme au voisinage de l'infini.

Proposition: (Caractérisation de l'équivalence. de deux fonctions.)

Proposition 0.2. *Soient f, g deux fonctions telles que: $f \underset{(x_0)}{\sim} g$,on a le résultat suivant:*

$$f(x) \underset{(x_0)}{\sim} g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o(g(x))$$

Preuve:

$$f(x) \underset{(x_0)}{\sim} g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x) - g(x) = o(g(x)).$$

Exemple:

(1) $P_n(x) = \sum_{0\le k\le n} a_k.x^k \underset{(\infty)}{\sim} a_n x^n$

(2) On a $\sin x \underset{(0)}{\sim} x$ (limite remarquable), par conséquent $\sin x = x + o(x)$.

(3) $e^x - 1 \underset{(0)}{\sim} x$,(limite remarquable), par conséquent $e^x = 1 + x + o(x)$.

(4) $Ln(1+x) \underset{(0)}{\sim} x$,(limite remarquable), par conséquent $Ln(1+x) = x + o(x)$.

(5) $(1+x)^\alpha \underset{(0)}{\sim} 1 + \alpha x + o(x), \alpha$ rationnel positif.

Exercice:: Calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 \ln^2 x}{e^{5x}}$

Propriétés:

(1) Si $f \underset{(x_0)}{\sim} u$ et $g \underset{(x_0)}{\sim} v$ $\quad alors \quad f.g \underset{(x_0)}{\sim} u.v$ et $\frac{f}{g} \underset{(x_0)}{\sim} \frac{u}{v}$

(2) Si $f \underset{(x_0)}{\sim} g, pour\ \alpha \in \mathbb{R} \quad et \quad f, g$ positives sur $V(x_0) \quad alors \quad f^\alpha \underset{(x_0)}{\sim} g^\alpha$

(3) **Composition**

Soit $\varphi(x)$ une fonction définie au $V(x_0)$ et soient $f$et g deux autres fonctions définies au $V(a)$,

telles que: $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = a$ et $f \underset{(a)}{\sim} g$ alors $f \circ \varphi \underset{(x_0)}{\sim} g \circ \varphi$.

Attention: En général :

$$f \underset{(x_0)}{\sim} u \quad et \qquad g \underset{(x_0)}{\sim} v \qquad \not\Rightarrow \quad f \pm g \underset{(x_0)}{\sim} u \pm v$$

$$f \sim g \quad et \quad h \text{ une fonction} \quad \not\Rightarrow \quad h \circ f \sim h \circ g$$

Exemple:

(1) $f(x) = \cos x \underset{(0)}{\sim} 1 + x^3$et $g(x) = -1 \underset{(0)}{\sim} -1$.

On a : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} -\left(\frac{2}{4}\right)\left(\dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\dfrac{x}{2}}\right)^2 = \infty \neq 1.$

(2) $f(x) = e^{(x^2+x)}, g(x) = e^{x^2}$et $\varphi(x) = \ln x$.

$\varphi o f(x) = \ln e^{(x^2+x)} = x^2 + x$ et $\varphi \circ g(x) = \ln e^{x^2} = x^2$.

On a : $e^{(x^2+x)} \underset{(0)}{\sim} e^{x^2}$ par contre $\varphi \circ f(x) \nsim \varphi \circ g(x)$,

puisque $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\varphi \circ f(x)}{\varphi \circ g(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = \infty \neq 1.$

Quelques équivalents de références

- $\sin u \underset{(0)}{\sim} u$; $\arcsin u \underset{(0)}{\sim} u$; $shu \underset{(0)}{\sim} u$
- $\tan u \underset{(0)}{\sim} u$; $\arctan u \underset{(0)}{\sim} u$; $thu \underset{(0)}{\sim} u$
- $1 - \cos u \underset{(0)}{\sim} \dfrac{u^2}{2}$; $1 - chu \underset{(0)}{\sim} -\dfrac{u^2}{2}$; $ln(1+u) \underset{(0)}{\sim} u$
- $[(1+u)^\alpha - 1] \underset{(0)}{\sim} \alpha u$; $e^u - 1 \underset{(0)}{\sim} u$;

Plus généralemnt, si u est une fonction telle que $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 0$, on obtient alors:

- $\sin u(x) \underset{(x_0)}{\sim} u(x)$; $\arcsin u(x) \underset{(x_0)}{\sim} u(x)$; $shu(x) \underset{(x_0)}{\sim} u(x)$

- $\tan u(x) \underset{(x_0)}{\sim} u(x)$; $\arctan u(x) \underset{(x_0)}{\sim} u(x)$; $thu(x) \underset{(x_0)}{\sim} u(x)$

- $1 - \cos u(x) \underset{(x_0)}{\sim} \dfrac{(u(x))^2}{2}$; $1 - chu(x) \underset{(x_0)}{\sim} -\dfrac{(u(x))^2}{2}$; $ln(1 + u(x)) \underset{(x_0)}{\sim} u(x)$

- $[(1 + u(x))^\alpha - 1] \underset{(x_0)}{\sim} \alpha u(x)$; $e^{u(x)} - 1 \underset{(x_0)}{\sim} u(x)$;

Exercice 1. *: Calculer à l'aide d'équivalents et de petit "o", les limites suivantes.*

$$(1) \quad \lim_{x\to 2} \frac{\sin(x^2 - 4)}{x^2 - 5x + 6} \quad ; \quad (2) \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sqrt[3]{1 + x}}{2\arctan x - \arcsin x}$$

$$(3) \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2 cox(e^x - 1)^2}{x^3} \quad ; \quad (4) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x \ln(x^2 - 1)}{xtgx}$$

Exercice 2. *: Prouver que*

$$(1) \quad \lim_{x\to 0} \frac{(1 - e^x)\sin x}{x^2 + x^3} = -1 \quad ; \quad (2) \quad \lim_{x\to 0^+} x \ln(xsh\frac{1}{x}) = 1$$

Exercice 3. *: Déterminer les limites suivantes:*

$$(1) \quad \lim_{x\to +\infty} \ln \frac{e^{2x} + 1}{e^x + 1} \quad ; \quad (2) \quad \lim_{x\to 1} (1 + \ln x)^{tg\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

Formule de Taylor

Définition : Soit f une fonction continue au voisinage de x_0, telle que les n dérivées successives de f en x_0

existent et sont finies, c'est à dire $f^{(k)}(x_0) \in \mathbb{R}$, pour tout entier $k, k \in \{1, \ldots, n\}$.

Alors pour $x \in V(x_0), x \neq x_0$,f peut s'écrire sous la forme suivante:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f"(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x, x_0)$$

Cette formule est appelée formule de Taylor de f à l'ordre n en x_0 ou au

On note

$$P_n(x, x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f"(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$P_n(x, x_0)$ est un polynôme de degré n en $(x - x_0)$ appelé partie régulière.

la fonction $R_n(x, x_0)$ est appelé le reste d'ordre n.

Cela revient donc à dire que f peut être approximée par un polynôme de degré n.

et l'erreur commise par cette approximation $R_n(x, x_0)$, est telle que $\lim_{x \to 0} R_n(x, x_0) = 0$.

Remarque: Plusieurs évaluations de ce reste existent, ce qui induit différentes formules de Taylor.

Remarque 0.1. *Dans ce cours on se limitera à l'une d'elles. qui est la suivante:*

Formule de Taylor avec reste de Young

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f"(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right)$$

c'est à dire que $R_n(x, x_0) = o\left((x - x_0)^n\right)$.

On rappelle $o\left((x - x_0)^n\right) = (x - x_0)^n \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

♦ Si $x_0 = 0$, la formule est connue sous le nom de formule de **Maclaurin** :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f"(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o\left(x^n\right)$$

Exemple: Considérons la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}, x \neq 1$.

f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} - \{1\}$ (voir cours fonctions élémentaires.), c'est à dire que f est continûment dérivable à tout ordre.

et on a pour $n \geq 1$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ ce qui donne en 0, $f^{(n)}(0) = n!$.

On obtient donc la formule de Maclaurin de f au $V(o)$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1 + \tfrac{1!}{1!}x + \tfrac{2!}{2!}x^2 + \cdots + \tfrac{n!}{n!}x^n + o(x^n) \\ &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

Grâce à la formule de Taylor au V(0), on obtient des approximations de fonctions élémentaires.

Exemple::

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \cdots + \tfrac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ \ln(1+x) &= x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\tfrac{x^n}{n} + o(x^n) \end{aligned}$$

Execice: Prouver les formules de l'exemple précédent.

Développement Limités

Définition: On dit que f admet un développement limité en x à l'ordre n, qu'on note $DL_n(x_0)$,

s'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$,vérifiant $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

tels que pour tout $x \in I$,

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x).$$

le polynôme $P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n$ est appelé partie principale ou régulière du développement.

On rappelle que $(x - x_0)^n \varepsilon(x) = o((x - x_0)^n)$.

Exemple: On reprend la fonction définie dans l'exemple précédent par : $f(x) = \dfrac{1}{1-x}, x \neq 1$.

f admet un $DL_n(0)$, en effet : on a

$$\begin{aligned}\frac{1-x^{n+1}}{1-x} &= \frac{(1-x)(1+x+\cdots+x^n)}{1-x}\\ &= 1+x+\cdots+x^n\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1+x+\cdots+x^n+\frac{x^{n+1}}{1-x}\\ &= 1+x+\cdots+x^n+x^n\frac{x}{1-x}\end{aligned}$$

on a alors $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 1$ et $\varepsilon(x) = \dfrac{x}{1-x} \to 0$ si $x \to 0$.

⊠

On remarque que dans ce cas le développement limité est exactement la formule de Taylor.

la question à laquelle on répondra éventuellement est: " est ce qu'une formule de taylor est un D.L

et est ce qu'un DL est une formule de Taylor?".

Remarque:

les hypothèses de continuité et de dérivabilité de la fonction pour qu'elle admette un développement en formule de Taylor,

est exigé, par contre pour qu'elle admette un développement limité aucune de ses propriété ne l'est.

Propriétés:

- **Unicité** : Si f admet un $DL_n(x_0)$, alors ce développement est unique.

- **Troncature**: Si f admet un $DL_n(x_0)$, alors f admet un $DL_p(x_0), \forall p \geq n$.

- **Polynôme**:Le DL d'un polynôme de degré "n" est lui même.

- **<u>Existence</u>**::

(1) Si f admet un DL alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = a_0$, autrement dit $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe et est finie.

Ce critère sert en général de montrer qu'une fonction n'admet pas de DL

(losque sa limite est infinie.ou qu'elle n'existe pas).

Si la limite d'une fonction en x_0 est infinie.ou qu'elle n'existe pas, la fonction n'admet pas de DL.

Comme par exemple

$\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty,$ ce qui implique que la fonction ln n'admet pas de DL en 0.

(2) Si f admet un $DL_n(x_0), n \geq 1$ et si f est définie en x_0, (ou son prolongement) alors $f$est dérivable en x_0.

et on a $f'(x_0) = a_1$.

Il est clair que si f est dérivable elle admet un DL d'ordre 1 (formule deTaylor).

Attention: Si f admet un DL d'ordre 2, cela ne signifie pas que f est deux fois dérivable.

- on a pour exemple la fonction:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\dfrac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

, f admet un $DL_2(0)$ mais n'est pas deux fois dérivable en 0

En effet ;

$f(x) = x^3 \sin\dfrac{1}{x} = x^2(x\sin\dfrac{1}{x})$ est un $DL_2(0)$ $où$ $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ et $\varepsilon(x) = x\sin\dfrac{1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

on a $f\prime(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$, et $f'(x) = 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$.

D'où $f"(0) = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \left(3x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right)$ n'existe pas car $\cos\infty$ n'existe pas.

- Le DL d'un polynôme de degré "n" est lui même.

- **<u>Parité</u>**:

(1) Le DL d'une fonction paire a une partie principale qui ne contient que des puissances paires.

C'est à dire les coefficients $a_{2k+1} = 0$.

Exemple:

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o((x)^{2n}) \quad \text{c'est le } DL_{2n}(0) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o((x)^{2n+1}) \quad \text{c'est le } DL_{2n+1}(0) \end{aligned}$$

(2) Le DL d'une fonction impaire a une partie principale qui ne contient que des puissances impaires.

C'est à dire les coefficients $a_{2k} = 0$.

Exemple:

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o((x)^{2n+1}) \quad \text{c'est le } DL_{2n+1}(0) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n)!} + o((x)^{2n}) \quad \text{c'est le } DL_{2n}(0) \end{aligned}$$

Proposition: La formule de Taylor de f en x_0 à l'ordre n est un $DL_n(x_0)$ où $a_k = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Un $DL_n(x_0)$ est une formule de Taylor que si la fonction f est au moins de classe $C^n(V(x_0))$.

ce qui signifie qu'un Dl n'est pas toujours une formule de Taylor.(voir exemple précédent).

Développements limités usuels

Définition: (Développements limités usuels)

On appelle développement limité usuel, la formule de Maclaurin de toute fonction usuelle (élémentaire).

Exemple:: $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + o(x^5)$ est un $DL_5\,(0)$ obtenu par la formule de Taylor à l'ordre 5.

Remarque: En général les DL sont obtenus à partir d'opérations effectuées avec les développements usuels

puisque la plupart des fonction sont le résultat d'opérations de fonctions élémentaires (somme, produit, composition.)

Importance des DL à l'origine

Comme les DL usuels sont des outils importants dans le calcul de DLen général, il est judicieux de se ramener au voisinage de 0.

On effectue les changements de variables adéquats suivants:

· si $x_0 \in \mathbb{R}^*$, on utilise le changement de variable $u = x - x_0 \in V(0)$.

· si $x_0 = \infty$, on utilise le changement de variable $u = \dfrac{1}{x} \in V(0)$.

Le $DL_n(\infty)$ est alors de la forme suivante:

$$f(x) = a_0 + a_1\frac{1}{x} + \cdots + a_n\frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right).$$

<u>**Exemple**</u> : Calculer le $DL_3\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ de la fonction $\cos x$.

On pose $u = x - \dfrac{\pi}{2}, d'où\ x = u + \dfrac{\pi}{2}$.donc

$$\cos x = \cos(u + \frac{\pi}{2}) = -\sin u$$

on utilise le DL usuel

$$\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + o(u^3)$$

ce qui donne

$$\cos x = \left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{3!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3\right)$$

Opération sur les Développements limités

- **Somme** : $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon_1(x)$

$$et\ g(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon_2(x)$$

Alors $f + g$ admet un $DL_n(x_0)$ et on a:

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)(x - x_0) + \cdots + (a_n + b_n)(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$

<u>Exemple</u> Déterminer le $DL_3(0)$ de $\sin 2x + 3\cos x$.

On a : $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)$.et $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + o(x^3)$ (développements usuels à l'ordre 3).

On obtient alors

$$\begin{aligned} \sin 2x + 3\cos x. &= (2x) - \frac{(2x)^3}{3!} + o((2x)^3) + 3\left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right) \\ &= 3 + 2x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{8}{6}x^3 + 8o(x^3) + 3o(x^3) \\ &= 3 + 2x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

- **Produit**: Alors $f \times g$ admet un $DL_n(x_0)$ et on a::

- on fait le produit des deux parties principales et on ne garde que les termes de degré n.

  on obtient:

$$f(x).g(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \cdots + c_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$

  où $c_0 = a_0 b_0, c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, c_k = \sum_{0 \le i \le k} a_i b_{k-i}, pour\ k \in \{1, \ldots, n\}$.

  et tous les termes de degré supérieur à n sont des $o((x - x_0)^n)$.

Exemple ; Déterminer le $DL_3(0)$ de $\sin x.\cos x$.

$$\begin{aligned}
\sin x \cos x &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right) \\
&= \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!}\right) \\
&= x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{2!.3!} + \cdots \\
&= x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^3}{2!} + x^3(\frac{x^2}{2!.3!} + \cdots) \\
&= x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^3}{2!} + x^3\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

- **Quotient**:: On distingue deux cas.

1 Cas $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ admet un $DL_n\,(x_0)$

pour l'obtenir on effectue une division selon les puissances croissantes jusqu'à lordre n de la partie principale de f par celle de g,

Exemple: Calculer $DL_3\,(0)$ de la fonction $tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$\begin{array}{ccc}
x - \frac{x^3}{3!} & \vdots & 1 - \frac{x^2}{2!} \\
 & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\
-x + \frac{x^3}{2} & \vdots & x + \frac{x^3}{3} \\
\frac{x^3}{3} & \vdots & \\
-\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{6} & &
\end{array}$$

on a alors

$$\frac{x - \frac{x^3}{3!}}{1 - \frac{x^2}{2!}} = x + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

Ce qui donne

$$\frac{\sin x}{\cos x} = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

2 Cas $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$

Dans ce cas on n'a pas forcément $\dfrac{f}{g}$ n'admet pas un $DL_n\,(x_0)$.

En effet l'exemple de la fonction $\dfrac{\sin x}{x}$ le montre bien , elle admet un $DL_3\,(0)$ alors que $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$.

on a deux possibilités :

* Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq 0$,dans ce cas$\dfrac{f}{g}$ n'admet pas un $DL_n\,(x_0)$ .puisque $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$

* Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, dans ce cas

$$\begin{aligned} f(x) &= a_p(x-x_0)^p + \cdots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon_1(x) \\ & et \\ g(x) &= b_q(x-x_0)^q + \cdots + b_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon_2(x) \end{aligned}$$

avec $a_p \neq 0, b_q \neq 0$.On traite alors le quotient $\dfrac{f}{g}$ selon les valeurs de p et q.

• si $p < q$, alors

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{a_p(x-x_0)^p + \cdots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon_1(x)}{b_q(x-x_0)^q + \cdots + b_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon_2(x)} \\ &= \frac{a_p + \cdots + a_n(x-x_0)^{n-p} + (x-x_0)^{n-p}\varepsilon_1(x)}{b_q(x-x_0)^{q-p} + \cdots + b_n(x-x_0)^{n-p} + (x-x_0)^{n-p}\varepsilon_2(x)} \end{aligned}$$

comme $p - q > 0$ et $a_p \neq 0$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

• si $p \geq q$, alors

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{a_p(x-x_0)^p + \cdots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon_1(x)}{b_q(x-x_0)^q + \cdots + b_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon_2(x)} \\ &= \frac{a_p(x-x_0)^{p-q} + \cdots + a_n(x-x_0)^{n-q} + (x-x_0)^{n-q}\varepsilon_1(x)}{b_q + \cdots + b_n(x-x_0)^{n-q} + (x-x_0)^{n-q}\varepsilon_2(x)} \end{aligned}$$

on est ramené au cas $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, puisque $b_q \neq 0$.

Exemple: Déterminer le $DL_3\,(0)$ de $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$. On a $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$ et $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + o(x^5)$.

$b_1 \neq 0$ donc $q = 1$, ainsi $n - q = 3 \Rightarrow n = 4$. on doit développer $\sin x$ et $\ln(1+x)$ à l'ordre 4.

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4).
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1+x)}{\sin x} &= \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)}{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)} \\
&= \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{3!} + o(x^3)} \\
&= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)
\end{aligned}$$

- **Composition:** Si g admet un $DL_n(x_0)$ et f admet un $DL_n(g(x_0))$,

  alors la fonction composée $f \circ g$ admet un $DL_n(x_0)$,obtenu en remplaçant g dans le DL de f par son DL,

  en ne gardant que les monômes de degré $\leq n$. C'est à dire si on a

$$\begin{aligned}
f(u) &= a_0 + a_1(u-u_0) + \cdots + a_n(u-u_0)^n + (u-u_0)^n \varepsilon_1(u) \text{ où } u_0 = g(x_0) \\
&\quad et \\
g(x) &= b_0 + b_1(x-x_0) + \cdots + b_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n \varepsilon_2(x)
\end{aligned}$$

on obtient:

$$f(g(x)) = a_0 + a_1(g(x)-g(x_0)) + \cdots + a_n(g(x)-g(x_0))^n + (g(x)-g(x_0))^n \varepsilon_1(g(x))$$

Exemple : Calculer le $DL_3(0)$ de la fonction $e^{\cos x}$.

On a pour $u \in V(0)$ *et* $x \in V(0)$

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + o(u^3) \quad et \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$$

On remarque $\cos 0 = 1$, donc

Pour celà on pose $cosx = h = 1 + u \in V(1)$ donc $e^h = e^{1+u} = e.e^u$.

$$e^{\cos x} = e^{1-\frac{x^2}{2!}+o(x^3)} = e.e^{-\frac{x^2}{2!}+o(x^3)}$$

- on pose $u = -\dfrac{x^2}{2!} + o(x^3)$, on obtient

$$\begin{aligned} e^{\cos x} &= e(1 + \left(-\frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right) + \tfrac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right)^2 + o\left(\left(-\frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right)^3\right) \\ &= e(1 - \frac{x^2}{2!}) + o(x^3) \end{aligned}$$

∘ Question : Peut-on avoir une fonction composée qui admet un DL alors que les fonctions qui la composent n'admettent pas de DL?

- la réponse est oui, il en existe, comme par exemple la fonction $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ admet un $DL_2(0)$ alors que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$

  n'admet pas de $DL_1(0)$ puisqu'elle n'est pas dérivable en 0.

Dérivation et Intégration

(1) Si $f : I \to \mathbb{R}$ admet un $DL_n(x_0)$ et que f est de classe C^n au voisinage de x_0,alors la dérivée de f admet un $DL_{n-1}(x_0)$.

et on a pour

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

la dérivée

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1} + o((x - x_0)^{n-1})$$

(2) Si $f : I \to \mathbb{R}$ admet un $DL_n(x_0)$ et soit la fonction F dérivable sur I telle que $F(x) = f\prime(x)$ pour tout $x \in I$

(une telle fonction F est dite primitive de f).

Alors$F$ admet un $DL_{n+1}(x_0)$, obtenu en intégrant terme à terme la partie principale du DL de f.

et on a pour

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

la primitive

$$F(x) = a_0(x - x_0) + a_1\frac{(x - x_0)^2}{2} + \cdots + a_n\frac{(x - x_0)^{n+1}}{n + 1} + o((x - x_0)^{n+1})$$

Exemple:

1) Calculer $DL_3(0)$ de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{(1 - x)^2}$

Comme $\dfrac{1}{(1 - x)^2} = \left(\dfrac{1}{1 - x}\right)'$ et le $DL_4(0)$ de $\dfrac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)$.

En dérivant le $DL_4(0)$ on obtient le $DL_3(0)$ de $\dfrac{1}{(1 - x)^2}$

$$\frac{1}{(1 - x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + o(x^3)$$

2) Calculer $DL_4(0)$ de la fonction $F(x) = \ln(1 + x)$.

Comme $F'(x) = \dfrac{1}{1 + x}$ et le $DL_3(0)$ de $\dfrac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$.

En intégrant on obtient $DL_4(0)$ de F,

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

Calcul de limite en utilisant les DL

Les limites de formes indéterminées nécessitent généralement l'utilisation des développement limités pour les calculer.

Pour celà on opte pour un changement de variable pour se ramener au voisinage de 0.et utiliser les DL usuels.donnés par la table des DL.

on illustre celà par quelques exemples.

Exemple:

(1) *Calculer*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x$$

On a ; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x = 0\times\infty \qquad F.I$

On pose $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=u$, donc $u\to 0$ quand $x\to\frac{\pi}{2}$ et

$$\left(x-\frac{\pi}{2}\right)tgx = u.\tan\left(u+\frac{\pi}{2}\right) = u\frac{\sin\left(u+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{u}{\tan u}$$

Comme $\tan u = u+\frac{u^3}{3}+o(u^3)$ on obtient ;

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x \quad = \quad \lim_{u\to 0}\frac{u}{\tan u}$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{1}{1+\frac{u^2}{3}+o(u^2)} = 1$$

(2) *Calculer*

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{1+x}}\right)$$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{1+x}}\right)=\infty\times 0.$

On pose $t = \dfrac{1}{x}$, $u \to 0$ quand $x \to +\infty$. et

$$x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{1+x}}\right) = \frac{1}{t^2}\left(e^t - e^{\frac{t}{1+t}}\right)$$

Comme $\dfrac{x}{1+x} = x - x^2 + o(x^2)$ et $e^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$

on obtient $e^{\dfrac{t}{1+t}} = 1 + t - t^2 + \dfrac{(t-t^2)^2}{2!} + o(t^n) = 1 + t - \dfrac{1}{2}t^2 + o(t^2)$

D'où

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{t^2}\left(e^t - e^{\frac{t}{1+t}}\right) &= \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right) - \left(1 + t - \frac{1}{2}t^2\right) + o(t^2) \\
&= \frac{1}{t^2}\left(1 + t + \frac{t^2}{2} - 1 - t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)\right) = 1 + o(1)
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{1+x}}\right) &= \lim_{t\to 0}\tfrac{1}{t^2}\left(e^t - e^{\frac{t}{1+t}}\right) \\
&= \lim_{t\to 0} 1 + o(1) = 1
\end{aligned}$$

Asymptote et position

Le développement limité permet de situer la courbe d'une fonction par rapport à ses asymptotes.

On uppose que

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

On pose $X = \dfrac{1}{x} \to 0$ quand $x \to \infty$, on calcule le DL(0) à un ordre supérieur à 1 de $Xf(\frac{1}{X})$, pour trouver l'équation de l'asymptote.

Si

$$Xf(\frac{1}{X}) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n + +o(X^n)$$

en remplaçant on a

$$f(x) = a_0x + a_1 + \cdots + a_n\frac{1}{x^{n-1}} + +o\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right)$$

l'équation de l'asymptote est

$$y = a_0x + a_1$$

Soit m le plus petit entier supérieur à 1 tel que $a_m \neq 0$.

On a alors

$$f(x) - a_0 x + a_1 = a_m \frac{1}{x^m} + \cdots + a_n \frac{1}{x^{n-1}} + +o\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right).$$

- si $a_m > 0$, la courbe est au dessus de l'asymptote au voisinage de ∞.

- si $a_m < 0$ la courbe est en dessous de l'asymptote au voisinage de ∞.

Exemple:

Rechercher l'asymptote et donner sa position par rapport à la courbe de la fonction définie par:

$$f(x) = \left(\left(x^3 + 2x^2\right)\right)^{\frac{1}{3}}$$

au voisinage de $+\infty$.

On pose $X = \dfrac{1}{x} \to 0$ quand $x \to \infty$, on calcule le DL(0) à un ordre supérieur à 1 de $Xf(\frac{1}{X})$.

$$Xf(\tfrac{1}{X}) \quad = \quad (1+2X)^{\frac{1}{3}} + o(X^2)$$

On a le DL

$$(1+u)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}u - \frac{1}{9}u^2 + o(u^2)$$

(voir le DL usuel dans la table des DL de la fonction élémentaire $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots$).

Ce qui donne $Xf(\frac{1}{X}) \quad = \quad 1 + \frac{2}{3}X - \frac{4}{9}X^2 + o(X^2)$ avec $u = 2X$.

on a alors

$$f(x) = x + \frac{2}{3} - \frac{4}{9x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

L'équation de l'asymptote est $y = x + \dfrac{2}{3}$ et la courbe est en dessous de l'asymptote puisque $-\frac{9}{4} < 0$.

Exercice:

I) Ecrire la formule de taylor avec le reste de Lagrange au point x_0 indiqué, des fonctions suivantes:

1) $f(x) = \ln(2x+1),\ x_0 = \frac{1}{2}$ 2) $f(x) = shx,\ x_0 = 0$

II) En utilisant la formule de Mac Laurin, montrer que :

1) $\forall x > 0, x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$ 2) $\forall x > 0, 0 \leq shx - x - \dfrac{x^3}{6} \leq \dfrac{x^4 shx}{24}$

Exercice:

I) Déterminer le D.L au voisinage de x_0 à l'ordre n indiqués, des fonctions suivantes:

$\boxed{1)}$ $f(x) = \dfrac{\sin x}{2 + x^4 + x^6},\ x_0 = 0, n = 5$ 2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+2x} - 1}{\cos x - 1}, x_0 = 0, n = 3$

$\boxed{3)}$ $f(x) = \exp \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}, x_0 = 0, n = 2$ 4) $f(x) = \cos(\ln(1-x)), x_0 = 0, n = 4$

$\boxed{5)}$ $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2}, x_0 = +\infty, n = 2$ $\boxed{6)}$ $f(x) = \sqrt{2 + \sqrt{3+x}}, x_0 = 1, n = 2$

Exercice : En utilisant les D.L, calculer les limites suivantes:

$\boxed{1)}$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$ 2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \cos x - (e^x - 1)^2}{\sin^3 x}$

$\boxed{3)}$ $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x} \right)$ $\boxed{4)}$ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sqrt{1 + 2\cos x} - 1}{x - \dfrac{\pi}{2}}$

$\boxed{5)}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \left[\exp \dfrac{1}{x} - \exp \dfrac{1}{x+1} \right]$ 6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x - \sin x)}{\sqrt{1 + x^3} - 1}$