

Corrigé de la série d'exercices n°6 - Intégration
I) Rappels de certains types d'intégration

Fonctions rationnelles:

Type I : $\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + c.$

Type II : $\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + c.$

Type III : $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c.$

Type IV : $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, n > 1.$ Pour calculer J_n , utiliser cette formule de récurrence

$$2na^2 I_{n+1} = (2n-1) I_n + \frac{x}{(x^2+a^2)^n} \text{ avec } I_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c.$$

Type V : $J_1 = \int \frac{Mx+N}{x^2+2\alpha x+\beta} dx \quad (\alpha^2-\beta < 0).$ Remarquons que $x^2+2\alpha x+\beta = (x+\alpha)^2 + \beta - \alpha^2$

Posons par la suite $t = x+\alpha$ et $\beta - \alpha^2 = h^2 > 0.$ On obtient

$$\begin{aligned} J_1 &= \int \frac{Mt+N-\alpha M}{t^2+h^2} dt = \frac{1}{2} M \int \frac{2t}{t^2+h^2} dt + (N-\alpha M) \int \frac{dt}{t^2+h^2} \\ &= \frac{1}{2} M \ln(t^2+h^2) + \frac{1}{h} (N-\alpha M) \operatorname{arctg} \frac{t}{h} + c = \frac{1}{2} M \ln(x^2+2\alpha x+\beta) + \frac{1}{h} (N-\alpha M) \operatorname{arctg} \frac{1}{h} (x+\alpha) + c. \end{aligned}$$

Type VI : $J_n = \int \frac{Mx+N}{(x^2+2\alpha x+\beta)^n} dx \quad (\alpha^2-\beta < 0); n > 1.$ Posons $t = x+\alpha$ et $\beta - \alpha^2 = h^2 > 0,$ on obtient

$$J_n = \int \frac{Mt+N-\alpha M}{(t^2+h^2)^n} dt = \frac{1}{2} M \int \frac{2t}{(t^2+h^2)^n} dt + (N-\alpha M) \int \frac{dt}{(t^2+h^2)^n} = \frac{1}{2} M \underbrace{\frac{-1}{(n-1)(t^2+h^2)^{n-1}}}_{Type IV} + (N-\alpha M) \underbrace{\int \frac{dt}{(t^2+h^2)^n}}_{Type IV}.$$

Fonctions trigonométriques:

Type VII : **Intégrale de la forme** $\int R(\sin x, \cos x) dx,$ où R est une fonction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x.$

En général, on pose $t = \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right)$ ($x = 2 \operatorname{arctg} t$), donc

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \text{ et } \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Cas particuliers:

1) $K_1 = \int R(\sin x) \cos x dx,$ poser $t = \sin x$ alors $dt = \cos x dx.$

2) $K_2 = \int R(\cos x) \sin x dx,$ poser $t = \cos x$ alors $dt = -\sin x dx.$

3) $K_3 = \int R(\sin^2 x, \cos^2 x) dx$ ou $K_3 = \int R(\operatorname{tg} x) dx,$ poser $t = \operatorname{tg} x$ ($x = \operatorname{arctg} t$) alors

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \text{ et } \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}.$$

4) $K_4 = \int \sin^n x \cos^m x dx \quad (n, m \in \mathbb{Z})$

a) n et m sont pairs, on pose alors $t = \operatorname{tg} x,$

b) n et m sont impairs, on pose alors $t = \cos 2x,$

c) n et m sont de parité différente, on pose alors $\begin{cases} t = \cos x & \text{si } n \text{ pair} \\ t = \sin x & \text{si } m \text{ pair} \end{cases}$

II) Corrigé de la série n°6.

Exercice 1 Calculer les intégrales indéfinies suivantes:

I) à l'aide d'un calcul direct

$$1) I_1 = \int \frac{\sqrt{x} - x^4 e^{x^2} + x^2}{x^3} dx = \int \frac{\sqrt{x}}{x^3} dx - \int \frac{x^4 e^{x^2}}{x^3} dx + \int \frac{x^2}{x^3} dx$$

$$= \int x^{-\frac{5}{2}} dx - \int x e^{x^2} dx + \int \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{-2}{3} x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} e^{x^2} + \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$2) I_2 = \int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx \quad \left(\text{car } \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \right)$$

$$= \int \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx \quad \left(\text{ind: } \int (\cos \alpha x) dx = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha x + c \right)$$

$$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

II) à l'aide d'un changement de variables

$$1) J_1 = \int \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)} dx \quad (t = \sqrt{x})$$

En utilisant le changement de variable $t = \sqrt{x}$, alors $x = t^2$ et donc $dx = 2tdt$

$$\begin{aligned} J_1 &= \int \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)} dx = \int \frac{t^2 2t}{t(t^2+1)} dt \\ &= 2 \int \frac{t^2 dt}{t^2+1} = 2 \int \frac{t^2 + 1 - 1}{t^2+1} dt = 2 \int 1 dt - 2 \int \frac{1}{t^2+1} dt \\ &= 2t - 2 \arctg t + c, \quad c \in \mathbb{R} \quad = 2\sqrt{x} - 2 \arctg \sqrt{x} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$1) J_3 = \int \frac{e^{3x}}{e^{6x} + 25} dx$$

En utilisant le changement de variable $t = e^{3x}$, alors $dt = 3e^{3x} dx$ et donc

$$J_3 = \frac{1}{3} \int \frac{3e^{3x}}{e^{6x} + 25} dx = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 + 25} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{25 \left(\left(\frac{t}{5} \right)^2 + 1 \right)} = \frac{1}{75} \underbrace{\int \frac{dt}{\left(\frac{t}{5} \right)^2 + 1}}_J$$

Pour calculer J , on pose $z = \frac{t}{5}$, alors $dt = 5dz$ et donc

$$J = \int \frac{5dz}{z^2 + 1} = 5 \arctg z + c = 5 \arctg \left(\frac{t}{5} \right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$J_3 = \frac{1}{15} \arctg \left(\frac{e^{3x}}{5} \right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

III) à l'aide de l'intégration par parties

$$1) K_1 = \int \arctg \sqrt{x} dx$$

$$\text{Posons } \begin{cases} u(x) = \arctg \sqrt{x} \\ v'(x) = 1 \end{cases}, \text{ donc } \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)} \\ v(x) = x \end{cases} \quad \left(\text{ind: } (\arctg f)' = \frac{f'}{1+f^2} \right)$$

En appliquant la formule d'intégration par partie ($\int u(x)v'(x)dx = u(cx)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$), on obtient

$$\begin{aligned} K_1 &= \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx = x \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{1}{2} \int \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)} dx \\ &= x \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{1}{2} J_1 \\ &= x \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{1}{2} (2\sqrt{x} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x}) + c, \quad c \in \mathbb{R} = (x+1) \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3) $K_3 = \int x^2 \cos^2 x dx$.

On pose $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = \cos^2 x \end{cases}$, donc $\begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x \end{cases}$ (ind: $\int \cos^2 x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + c$, $c \in \mathbb{R}$ (voir la 1^{ère} partie))

Alors

$$\begin{aligned} K_3 &= \int x^2 \cos^2 x dx = x^2 \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x \right) - \int (2x) \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x \right) dx = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 \sin 2x - \int \left(x^2 + \frac{1}{2}x \sin 2x \right) dx \\ &= \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 \sin 2x - \underbrace{\int x^2 dx}_{=\frac{1}{3}x^3} - \frac{1}{2} \int x \sin 2x dx = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 \sin 2x - \frac{1}{2} \int x \sin 2x dx \end{aligned}$$

En faisant une seconde intégration par patie pour calculer $\int x \sin 2x dx$

On pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \sin 2x \end{cases}$, donc $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{cases}$. Alors

$$\int x \sin 2x dx = -\frac{1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = -\frac{1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

D'où:

$$K_3 = \int x^2 \cos^2 x dx = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x \cos 2x + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8} \right) \sin 2x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

IV) Fractions rationnelles

1) $L_1 = \int \frac{x}{(x+1)(2x+1)} dx$. Par la décomposotion en éléments simples, on obtient

$$\frac{x}{(x+1)(2x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1}$$

Donc

$$L_1 = \int \frac{x}{(x+1)(2x+1)} dx = \int \frac{1}{x+1} dx - \int \frac{1}{2x+1} dx = \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{2}{2x+1} dx$$

D'où

$$L_1 = \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|2x+1| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

3) $L_3 = \int \frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)} dx$. On a

$$\frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)} = \frac{1}{4} \frac{x+1}{x^2+1} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{7}{2(x-1)^3}$$

Alors

$$\begin{aligned} L_3 &= \int \frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)} dx = \frac{1}{4} \int \frac{x+1}{x^2+1} dx - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x-1)} + \frac{7}{2} \int \frac{dx}{(x-1)^3} \\ &= \frac{1}{8} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x^2+1} dx - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x-1)} + \frac{7}{2} \int \frac{dx}{(x-1)^3} \\ &= \frac{1}{8} \ln(x^2+1) + \frac{1}{4} \arctan x - \frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{7}{4} \frac{1}{(x-1)^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

V) Fonctions trigonométriques

1) $M_1 = \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x} = \int R(\cos^2 x; \sin^2 x) dx$. On pose $t = \operatorname{tg} x$, donc $dt = \frac{dt}{1+t^2}$ et $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$. Alors

$$M_1 = \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1 + \frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{2t^2 + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t) + c = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

2) $M_2 = \int \frac{dx}{1 + \cos x} = \int R(\cos x; \sin x) dx$. Posons $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$, donc $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ et $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Alors

$$M_2 = \int \frac{dx}{1 + \cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int dt = t + c = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + c + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

3) $M_3 = \int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx = \int R(\cos x) \sin x dx$. Il suffit de poser $\cos x = t$, alors $dt = -\sin x dx$

$$M_3 = \int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx = - \int \frac{dt}{1+t} = -\ln|1+t| + c = \ln\left(\frac{1}{1+\cos x}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

4) $M_4 = \int \sin^3 x \cos^4 x dx$. Il suffit de poser $t = \cos x$, alors $dt = -\sin x dx$

$$\begin{aligned} M_4 &= \int \sin^3 x \cos^4 x dx = - \int (\sin^2 x) (\cos^4 x) \underbrace{(-\sin x dx)}_{=dt} = - \int (1-t^2) t^4 dt = \int (t^6 - t^4) dt \\ &= \frac{1}{7}t^7 - \frac{1}{5}t^5 + c = \frac{1}{7}(\cos x)^7 - \frac{1}{5}(\cos x)^5 + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice 2 : Calculer les intégrales définies suivantes:

1) $N_1 = \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx$, on remarque que $\frac{1 + \ln x}{x} = (1 + \ln x)'(1 + \ln x)$, d'où

$$\int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx = \frac{1}{2} (1 + \ln x)^2 \Big|_1^e = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

3) $N_3 = \int_1^e \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} dx$, on pose $t = \ln x$, alors $dt = \frac{dx}{x}$ et lorsque $x \rightarrow 1$ (resp. $x \rightarrow e$), $t \rightarrow 0$ (resp. $t \rightarrow 1$) d'où

$$\int_1^e \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} dx = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t \Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

5) $N_5 = \int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}} dx$, posons $t = \ln x$ et donc $dt = \frac{dx}{x}$, lorsque $x \rightarrow 1$ (resp. $x \rightarrow e$), $t \rightarrow 0$ (resp. $t \rightarrow 1$). Alors

$$\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}} dx = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t \Big|_0^1 = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

7) $N_7 = \int_0^1 x \ln x dx$, en faisant l'intégration par parties, on pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \ln x \end{cases}$, donc $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = x \ln x - x = x(\ln x - 1) \end{cases}$.

Alors

$$N_7 = \int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx = x^2 \ln x - x^2 \Big|_0^1 - \int_0^1 (x \ln x - x) dx = -1 - \int_0^1 x \ln x dx + \int_0^1 x dx = -1 - N_7 + \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} - N_7.$$

D'où

$$N_7 = \frac{-1}{4}.$$