Université de Boumerdes ($UMBB$)
Faculté des sciences (FS)
Département de Mathématiques
Année 2019/2020
L'enseignant : BENZEMMOURI Moamed Tayeb

Corrigé de la série de TD sur les DLs ST

Exercise 1 *Soit la fonction f définie par $f(x) = \ln(1+x)$.*

En utilisant la formule de Mac-Laurin, montrer la double inégalité

$$\forall x \succ 0, x - \frac{1}{2}x^2 \prec \ln(1+x) \prec x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

La formule de Mac-Laurin avec reste intégrale de f à l'ordre n s'écrit

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f"(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + ... + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Avec $f(x) = \ln(1+x)$ de classe $C^n\left(IR_+^*\right)$.

Les dérivées successives de f jusqu'à l'ordre 4 sont données par

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x), f'(x) = \frac{1}{1+x}, f"(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \\ f^{(3)}(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} \text{ et } f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}, \end{aligned}$$

et

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f"(0) = -1, f^{(3)}(0) = 2 \text{ et } f^{(4)}(0) = -6.$$

En évaluant l'intégrale $\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt$ pour $n = 3$, sachons que $f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4} \prec 0$,alors

$$\int_0^x \frac{(x-t)^3}{n!}f^{(4)}(t)\,dt \prec 0.$$

Avec une triple intégration par partie de $\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt$, on obtient l'inégalité à droite,

$$\forall x \succ 0, \ln(1+x) \prec x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

Pour l'inégalité à gauche, on évalue l'intégrale $\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt$ pour $n = 2$, sachons que $f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \succ 0$, alors

$$\int_0^x \frac{(x-t)^2}{n!}f^{(3)}(t)\,dt \succ 0.$$

Avec une double intégration par partie de $\int_0^x \frac{(x-t)^2}{n!} f^{(3)}(t)\,dt$, on obtient l'inégalité à gauche,

$$\forall x \succ 0, x - \frac{1}{2}x^2 \prec \ln(1+x).$$

Donc

$$\forall x \succ 0, x - \frac{1}{2}x^2 \prec \ln(1+x) \prec x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

Pour les détails de l'intégration par partie de $\int_0^x \frac{(x-t)^3}{n!} f^{(4)}(t)\,dt$, on pose

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{(x-t)^3}{3!} \Longrightarrow u'(t) = -\frac{(x-t)^2}{2}dt \\ v(t) &= f^{(3)}(t) \Longleftarrow v'(t) = f^{(4)}(t)\,dt. \end{aligned}$$

On applique la formule de l'intégration par partie, on trouve

$$\begin{aligned} & \int_0^x u(t)\,v'(t)\,dt \\ = & \int_0^x \frac{(x-t)^3}{n!} f^{(4)}(t)\,dt \\ = & u(t)\,v(t) - \int_0^x v(t)\,u'(t)\,dt \\ = & \left[\frac{(x-t)^3}{3!} f^{(3)}(t)\right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} f^{(3)}(t)\,dt \\ = & -\frac{x^3}{3!} f^{(3)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} f^{(3)}(t)\,dt \\ = & -\frac{x^3}{3} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} f^{(3)}(t)\,dt. \end{aligned}$$

'De la même façon, on calcule l'intégrale $\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} f^{(3)}(t)\,dt$, jusqu'à trouver le résultat final

$$\forall x \succ 0, \ln(1+x) \prec x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

Exercise 2

1. En utilisant la division euclidienne par ordre croissant de 1 par le polynôme $2 - x^2 + x^5$,on obtient

   $$\frac{1}{2 - x^2 + x^5} = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{4} + \circ\left(x^5\right).$$

   La formule de Mac-Laurin permet d'écrire

   $$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2 - x^2 + x^5} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{4} + \circ\left(x^5\right) \\ &= f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f"(0) + \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(0) + \frac{x^4}{4!} f^{(4)}(0) + \frac{x^5}{5!} f^{(5)}(0) + \circ\left(x^5\right). \end{aligned}$$

Vu l'unicité du polynôme, et par identification termes à termes, on obtient

$$\frac{1}{4!}f^{(4)}(0)=\frac{1}{8},\frac{1}{5!}f^{(5)}(0)=-\frac{1}{4}.$$

D'où

$$f^{(4)}(0)=3,f^{(5)}(0)=-30.$$

1. $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{1-x}}$, $x_0=0$ et $n=5$.

En utilisant la table des DL au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+\sqrt{1-x}} \\ &= \sqrt{1+\sqrt{1+y}}, y=-x \end{aligned}$$

Le DL au voisinage de 0 à l'ordre 5 de $\sqrt{1+y}$ est donné par

$$\sqrt{1+y}=1+\frac{1}{2}y-\frac{1}{8}y^2+\frac{1}{16}y^3-\frac{5}{128}y^4+\frac{7}{256}y^5+\circ\left(y^5\right).$$

Donc

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}y^2-\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4-\frac{7}{256}x^5+\circ\left(x^5\right).$$

On pose $z=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}y^2-\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4-\frac{7}{256}x^5+\circ\left(x^5\right)$, $\lim_{x\to 0}z=0$, $f(x)=\sqrt{2+z}=\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{z}{2}}$, on pose $t=\frac{z}{2}$,$\lim_{z\to 0}t=0$, on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{2}\sqrt{1+t}=\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+\frac{1}{16}t^3-\frac{5}{128}t^4+\frac{7}{256}t^5+\circ\left(t^5\right)\right) \\ &= \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{4}z-\frac{1}{32}z^2+\frac{1}{128}z^3-\frac{5}{2048}z^4+\frac{7}{8192}z^5+\circ\left(z^5\right)\right), 2t=z \\ &= \sqrt{2}\left(1-\frac{1}{8}x-\frac{5}{128}x^2-\frac{21}{1024}x^3-\frac{429}{32768}x^4-\frac{2431}{262144}x^5+\circ\left(x^5\right)\right), x=-2z \end{aligned}$$

Donc, le $DL(5,0)$ de $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{1-x}}$ est

$$\sqrt{1+\sqrt{1-x}}=\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{8}x-\frac{5}{128}x^2-\frac{21}{1024}x^3-\frac{429}{32768}x^4-\frac{2431}{262144}x^5+\circ\left(x^5\right)\right).$$

2. $f(x)=e^{\cos 3x}$, $x_0=0$ et $n=4$.

En utilisant la table des DL au voisinage de 0, on a, on pose $y=3x$, $\lim_{x\to 0}y=0$.Le $DL(4,0)$ de $\cos y$ est

$$\cos y=1-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{24}y^4+\circ\left(y^5\right).$$

Donc

$$\cos 3x=1-\frac{9}{2}x^2+\frac{81}{15}x^4+\circ\left(x^5\right).$$

On remplace dans $e^{\cos 3x}$, on aura

$$\begin{aligned} e^{\cos 3x} &= e^{1-\frac{9}{2}x^2+\frac{81}{15}x^4+\circ\left(x^5\right)}. \\ &= ee^{-\frac{9}{2}x^2+\frac{81}{15}x^4+\circ\left(x^5\right)}. \\ &= ee^{z}. \end{aligned}$$

Avec $z=-\frac{9}{2}x^2+\frac{81}{15}x^4+\circ\left(x^5\right), \lim_{x\to 0} z=0$, et on utilise le $DL\left(4,0\right)$ de e^z,on a

$$e^z = 1+z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+\circ\left(z^4\right).$$

Donc

$$e^{\cos 3x} = e-\frac{9}{2}x^2e+\frac{27}{2}x^4e+\circ\left(x^5\right), z=-\frac{9}{2}x^2+\frac{81}{15}x^4+\circ\left(x^5\right)$$

3. De la même façon, on calcule les DLs de $e^{\frac{1}{\sqrt{1+x}}}$, on trouve

$$e^{\frac{1}{\sqrt{1+x}}} = e-\frac{1}{2}xe+\frac{1}{2}x^2e+\circ\left(x^2\right)$$

4. $f\left(x\right)=\sqrt{2+\sqrt{3+x}}, x_0=1$ et $n=2$.
   On Pose $y=x-1, \lim_{x\to 1} y=0$.

$$\begin{aligned} f\left(x\right) &= \sqrt{2+\sqrt{3+x}} \\ &= \sqrt{2+\sqrt{4+y}} \\ &= \sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{1+z}}, \text{avec } z=\frac{y}{4} \end{aligned}$$

Et on se ramène à la première fonction, et il suffit de le réécrire à l'ordre 2, on trouve

$$f\left(x\right)=2+\frac{1}{16}\left(x-1\right)-\frac{5}{512}\left(x-1\right)^2+\circ\left(\left(x-1\right)^2\right).$$

Exercise 3 *En utilisant les DLs, calculer les limites*

1. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x-(e^x-1)^2}{\sin^3 x}$, en passant directement à la limite, on trouve $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x-(e^x-1)^2}{\sin^3 x}=\frac{0}{0}$, forme indéterminée. Pour lever cette indétermination, on utilise les DLs à l'origine et à un ordre qui nous permet le calcul de cette limite. Les $DL\left(2,0\right)$ des fonctions $\cos x, e^x$ et $\sin x$ s'écrivent

   $$\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+\circ\left(x^3\right), e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\circ\left(x^2\right) \text{ et } \sin x \quad = x+O\left(x^3\right)$$

   On remplace ces 3 DLs dans la fonction f, on obtient

$$\begin{aligned} f\left(x\right) &= \frac{x^2\cos x-\left(e^x-1\right)^2}{\sin^3 x} \\ &= \frac{x^2\left(1-\frac{1}{2}x^2+\circ\left(x^3\right)\right)-\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\circ\left(x^2\right)-1\right)^2}{\left(x+\circ\left(x^2\right)\right)^3} \\ &= -1-\frac{3}{4}x+\circ\left(x\right). \end{aligned}$$

En passant à la limite, on trouve

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x-\left(e^x-1\right)^2}{\sin^3 x}=-1.$$

2. $\lim_{x\to 1}\frac{\cos(\ln x)-1}{(e^x-e)^2}$,en passant directement à la limite, on trouve $\lim_{x\to 1}\frac{\cos(\ln x)-1}{(e^x-e)^2}=\frac{0}{0}$, forme indéterminée. Pour lever cette indétermination, on utilise les DLs à l'origine et à un ordre qui nous permet le calcul de cette limite. On utilise les DLs

$$\ln x=x+\circ(x)\,,\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\circ\left(x^2\right)\ \text{ et }\ e^x=1+x+\circ(x)\,,$$

et avec un chagement de variable $y=x-1$, on se ramène à l'origine, donc on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 0}\frac{\cos(\ln(1+y))-1}{\left(e^{1+y}-e\right)^2} &= \lim_{y\to 0}\frac{\cos(\ln(1+y))-1}{e^2\left(e^y-1\right)^2}\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{-\frac{1}{2}y^2+\circ\left(y^2\right)}{e^2\left(y^2+\circ\left(y^2\right)\right)}\\ &= -\frac{1}{2e^2}.\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos(\ln x)-1}{\left(e^x-e\right)^2}=-\frac{1}{2e^2}.$$

3. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2}$,en passant directement à la limite, on trouve $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2}=\frac{0}{0}$, forme indéterminée.Pour lever cette indétermination, on utilise les DLs à l'origine et à un ordre qui nous permet le calcul de cette limite. On utilise les DLs

$$\ln x=x+\circ(x)\ \text{ et }\ \cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\circ\left(x^2\right)$$

et avec un chagement de variable $y=x-\frac{\pi}{2}$, on se ramène à l'origine, donc on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2} &= \lim_{y\to 0}\frac{\ln\left(\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right)}{4y^2}\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{\ln(\cos y)}{4y^2},\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)=\cos y\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{\ln\left(1-\frac{y^2}{2!}+\circ\left(y^2\right)\right)}{4y^2},\cos y=1-\frac{x^2}{2}+\circ\left(x^2\right)\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{-\frac{y^2}{2!}+\circ\left(y^2\right)}{4y^2},\ln\left(1-\frac{y^2}{2!}+\circ\left(y^2\right)\right)=-\frac{y^2}{2!}+\circ\left(y^2\right)\\ &= \lim_{y\to 0}\left(-1+\circ(1)\right)\\ &= -\frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{(\pi - 2x)^2} = -\frac{1}{8}.$$