Université M'Hamed Bougara Boumerdès

Faculté des Sciences

Département de Physique

Cours Physique1

S. BAHAMIDA **N. NEHAOUA**

Année : 2021/2022

UEF : Matière Physique 01

Sommaire

Chapitre 0 Rappel Mathématique

Chapitre 0

Rappels Mathématiques

Dans le cadre du présent chapitre, nous allons présenter quelques notions de bases liées au calcul vectoriel. En effet, la maîtrise de ces techniques est nécessaire pour l'assimilation de la mécanique.

I. Généralité

I.1 Grandeur physique

On appelle grandeurs physique toutes propriétés de la nature qui peut être quantifiée par la mesure ou par le calcul, et dont les differentes valeurs possibles s'expriment à l'aide d'un nombre accompagné d'une unité de mesure.

Il existe deux types de grandeurs mesurables : Scalaires et Vectorielles.

Un scalaire est une grandeur totalement définie par un nombre est une unité (temps, température, masse, énergie, volume, … etc)

Exemple : Tableau0.1

Tableau0.1

Grandeurs scalaires	*Grandeurs vectorielles*
Longueur	Vitesse
Masse	Accélération
Temps	

I.2. Système International d'unités (SI)

Le SI fixe des règles pour les préfixes, les unités dérivées… Le SI est fondé sur un choix de 7 unités de base bien définies et considérées comme indépendantes du point de vue dimensionnel (Tableaux0.2).

Tableau 0.2 : Grandeur de base.

Grandeurs de base	Unités	Symboles
Masse	Kilogramme	kg
Longueur	Mètre	m
Temps	Seconde	s
Intensité du courant électrique	Ampère	A
Température	Kelvin	K
Quantité de la matière	Mole	mol
Intensité lumineuse	candela	cd

I.3. Les équations aux dimensions

I.3.1. Dimension d'une grandeur physique

Les grandeurs fondamentales du SI vont être désignées par des lettres majuscules Tableau0.3 :

Tableau0.3

Grandeurs de base (G)	Symbole	Unités	Dimension [G]
Masse	m	kg	M
Longueur	l	m	L
Temps	t	s	T
Intensité du courant électrique	i	A	I
Température	T	K	Ɵ
Quantité de la matière	N	Mol	N
Intensité lumineuse	j	cd	J

On attribue à toutes les grandeurs dérivées, une dimension qui s'exprime par un produit (avec des puissances entières positives, négatives ou nulles) des dimensions des grandeurs fondamentales.

I.3.2. Équations aux dimensions

L'analyse dimensionnelle consiste à déterminer les dimensions attribuées aux expressions reliant des grandeurs physiques. Cela permet de contrôler la cohérence de formules ou d'égalités.
En effet, pour additionner, ou égaler, deux expressions reliant des grandeurs physiques, il est nécessaire (mais pas suffisant) qu'elles aient la même dimension.
Les équations aux dimensions sont des écritures conventionnelles qui résument simplement la définition des grandeurs dérivées des unités fondamentales : Longueur, Masse et Temps : symbolisées par les majuscules L, M et T. On écrit :

$$\left[G\right] = L^a M^b T^c I^d \theta^e N^f cd^g$$

Les équations aux dimensions servent à vérifier l'homogénéité des formules Tableau0.4.
Tableau0.4 :

Grandeurs	Symbole	Formule de base	Dimension [G]	unite
Surface	S	Ll	L^2	m^2
Volume	V	Llh	L^3	m^3
vitesse	v	v = h/t	LT^{-1}	ms^{-1}
accélération	a	a=v/t	LT^{-2}	ms^{-2}
Force	F	F=ma	MLT^{-2}	$kgms^{-2}$
Pression	P	P=F/S	$ML^{-1}T^{-2}$	$kgm^{-1}s^{-2}$

Règles sur les équations aux dimensions

- $G = x + y$, alors $[G] = [x] = [y]$
- $G = x.y/z$ alors $[G] = [x].[y].[z]^{-1}$
- Pour les fonctions suivantes : sin(u), cos(u), tan(u), ln(u), log(u) et e^u , la grandeur u est sans dimension ([u] = 1).

Exemple 0.1
Donner la dimension et les unités dans le Système International (SI) des grandeurs suivantes : Force, Quantité de mouvement, Energie (Travail), Puissance, Masse volumique, Pression, Charge électrique, constante de raideur k, Champ électrique E.

Exemple 0.2
La période du pendule simple est donnée par la relation suivante : $T = 2\Pi l^{\alpha} g^{\beta}$. Déterminer les constantes α et β.

Exemple 0. 3
Montrer que le produit d'une pression par un volume est homogène à une énergie.
Déduire l'unité de la constante R des gaz parfaits

II. Les vecteurs

II.1. Définition : Un vecteur est une entité mathématique définie par une origine, une direction, un sens et une intensité (figure 0.1).

- ***L'origine***: le point d'application
- ***La direction*** : la droite qui porte le vecteur. Elle est définie par l'angle θ mesuré entre un axe de référence et le support.
- ***Le sens*** représente l'orientation origine-extrémité du vecteur et est symbolisé par une flèche.
- ***L'intensité, norme ou module***, représente la valeur de la grandeur mesurée par le vecteur.

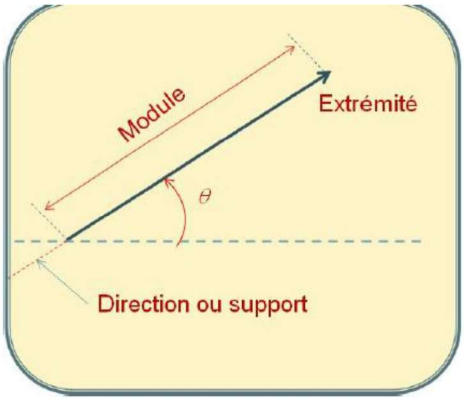

Figure 0.1

II.2. Notion de vecteur unitaire

A chaque vecteur on peut associer un vecteur unitaire qui a la même direction et de norme égale à 1. On obtient le vecteur unitaire en divisant le vecteur initial par son module figure0.2 :

$$\left\|\vec{u}\right\| = \frac{\vec{A}}{\left\|\vec{A}\right\|}$$

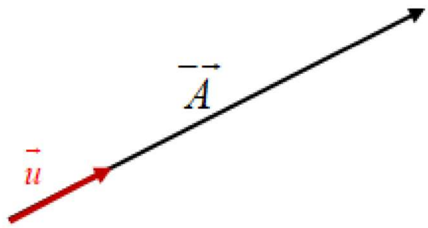

Figure 0.2

II.3. Composantes du vecteur

Un vecteur est décrit par ses composantes qui sont déterminées à partir d'un repère. Ce repère peut être linéaire (une seule composante x), plan (deux composantes x, y) ou dans l'espace (trois composantes x, y, z).

<u>Coordonnées d'un vecteur dans le repère cartésien</u>

Le repère cartésien est un repère orthonormé : les vecteurs unitaires doivent être orthogonaux entre eux et normés à l'unité.

- **Dans le plan (O, x, y)**

Le vecteur s'écrit **:**

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y$$

Avec

$$\vec{V}_x = V_x\vec{i}$$

$$\vec{V}_y = V_y\vec{j}$$

$$V_x = V\cos\alpha$$

$$V_y = V\sin\alpha$$

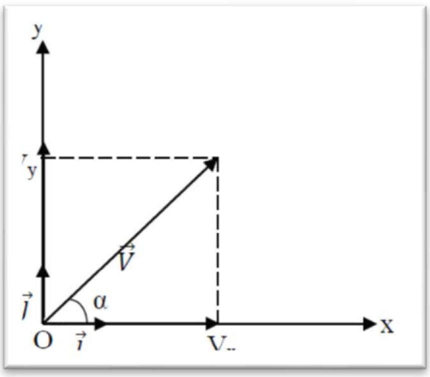

Figure0.3 : *Projection d'un vecteur dans le plan (O, i ,j)*

Les composantes du vecteur V dans le plan orthonormé $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$ sont V_x et V_y, on écrit :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V\cos\alpha \\ V\sin\alpha \end{pmatrix}$$

Ou

$$\vec{V} = V\left(\cos\alpha\vec{i} + \sin\alpha\vec{j}\right)$$

Le module du vecteur $\left\|\vec{V}\right\|$ est donné par: $\left\|\vec{V}\right\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$

- **Dans le plan (O, x, y, z)**

Le vecteur s'écrit :

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y + \vec{V}_z$$

Avec $\vec{V}_x = V_x\vec{i}$, $\vec{V}_y = V_y\vec{j}$, $\vec{V}_z = V_z\vec{k}$

$$V_x = V\cos\alpha$$
$$V_y = V\sin\beta$$
$$Vz = V\cos\theta$$

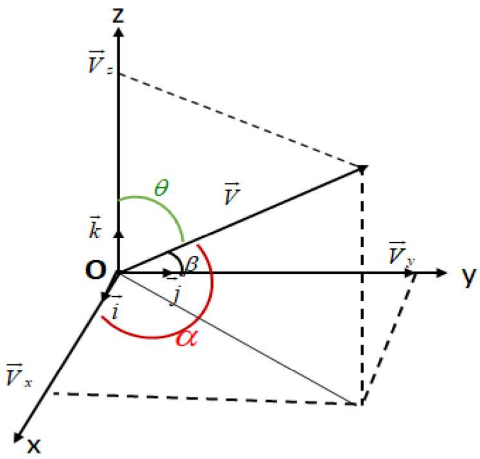

Figure 0.4

Les composantes du vecteur V dans le plan orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont V_x, V_y et V_z d'où :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V\cos\alpha \\ V\sin\beta \\ V\cos\theta \end{pmatrix}$$ Ou bien $$\vec{V} = V\left(\cos\alpha\vec{i} + \sin\beta\vec{j} + \cos\theta\vec{k}\right)$$

Le module du vecteur $\|\vec{V}\|$ est donné par : $$\|\vec{V}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

II.4. Opération sur les vecteurs

II.4.1. Produit scalaire

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$, faisant entre eux l'angle θ est un scalaire, et représenté par la relation :

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos\theta$$

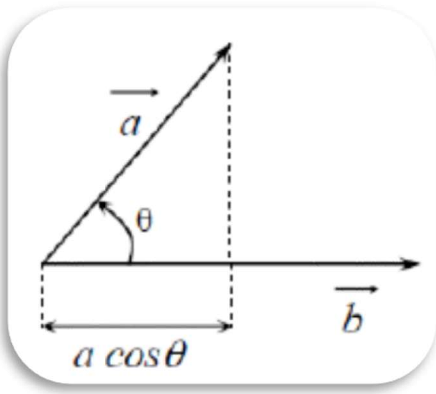

Figure 0.5

D'après la définition, il s'avère que le produit scalaire est commutatif c'est-à-dire :

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$$

On conçoit facilement d'après la définition que :

$$\vec{A}\cdot\vec{A}=\vec{A}^2=A^2$$

De même en désignant par X, Y, Z et X', Y', Z' les coordonnées de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ par rapport aux trois axes rectangulaires de vecteurs unitaires i , j , k , on peut écrire :

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)\cdot\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}\right)$$
$$=xx'+yy'+zz'$$

II.4.2. Produit vectoriel

Le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est un vecteur perpendiculaire au plan formé par ces deux vecteurs.

$$\vec{W}=\vec{A}\times\vec{B}$$

Le produit vectoriel peut être calculé à partir de la méthode du déterminant :

Soit deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ telle que :

$$\vec{A}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}\qquad\vec{B}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$$

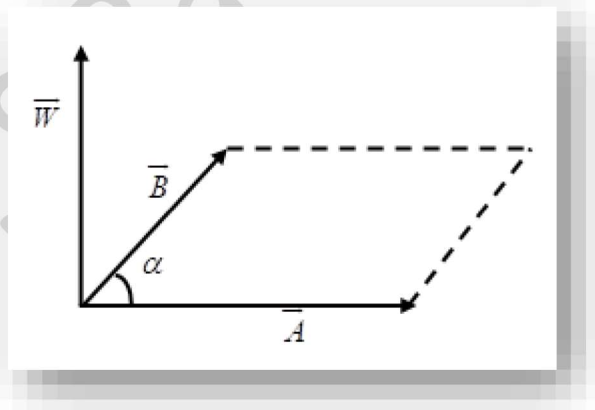

Figure 0.6

$$\vec{W}=\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & -\vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\vec{W}=\vec{A}\times\vec{B}=\left(y_1z_2-z_1y_2\right)\vec{i}-\left(x_1z_2-z_1x_2\right)\vec{j}+\left(x_1y_2-y_1x_2\right)\vec{k}$$

A partir de cette relation, on peut calculer le module de $\left\|\vec{W}\right\|$ par :

$$\left\|\vec{W}\right\|=\sqrt{\left(y_1z_2-z_1y_2\right)^2+\left(x_1z_2-z_1x_2\right)^2+\left(x_1y_2-y_1x_2\right)^2}$$

- **Propriétés du produit vectoriel :**

Non commutatif : $\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$

Non associatif : $\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\neq\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{C}$

Distributif $\vec{A}\times\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)+\left(\vec{A}\times\vec{C}\right)$

Remarque

$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$

$\left|\vec{i}\times\vec{j}\right|=\left|\vec{i}\times\vec{k}\right|=\left|\vec{j}\times\vec{k}\right|=1$

$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{i}\times\vec{k}=\vec{j},\ \vec{i}\times\vec{k}=\vec{i}$

II.4.3. Le produit mixte

On appelle produit mixte de trois vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ une quantité scalaire égale au produit scalaire du troisième vecteur et du produit vectoriel des deux premiers :

$$\boxed{W=\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{C}}$$

Ce produit mixte donne le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$.

Le produit mixte est nul, si :

- Les trois vecteurs sont dans le même plan
- Deux des vecteurs sont colinéaires.
- L'un des vecteurs, est nul.

On montre facilement que, dans une base orthonormée directe, le produit mixte est un variant scalaire par permutation circulaire direct des trois vecteurs car le produit scalaire est commutatif :

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{C}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\vec{B}\cdot\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)$$

II.6. Les opérateurs différentiels :

II.6.1. Définition

Une fonction à une seule variable est une fonction qui dépend d'une seule variable x : F=f(x). Si la fonction f est dérivable en tout point x, on définit F' la dérivée de la fonction f tel que $F'=\dfrac{df}{dx}$

Si la fonction dépend de plusieurs variables x, y, z,…., on définit ce que l'on appelle une différentielle.

Une fonction à deux variables est une fonction qui dépend de deux variables : F=f(x,y)

Une fonction à trois variables est une fonction qui dépend de trois variables x, y, z : F=f (x,y, z)

La différentielle totale d'une fonction algébrique F à trois variables x, y, z s'écrit :

$$dF = df(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Avec $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ sont des différentielles partielles.

Exemple 0.4 : Soit la fonction : $f(x,y,z) = x^2 - 2y + 4z$

La différentielle totale est donnée par : $df = 2xdx - 2dy + 4dz$

II.6.2. Les opérateurs:

- **Nabla**

L'opérateur nabla $\vec{\nabla}$ est très utile en analyse vectorielle. Il permet de déterminer les notions de gradient, rotationnel, divergence et Laplacien de manière simple. Il est défini comme suit

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

- **Gradient**

Le gradient est un opérateur qui agit sur les fonctions algébriques et les transforme en fonctions vectorielles par l'opérateur nabla. On définit le vecteur gradient de la fonction algébrique f comme suit :

$$\overrightarrow{grad}\, f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

<u>Exemple</u> :

Soit $f(x,y,z) = xyz^2$ $\qquad \overrightarrow{grad}\, f = yz^2\vec{i} + xz^2\vec{j} + 2xyz\vec{k}$

- **Divergence**

La divergence est un opérateur qui agit sur les fonctions vectorielles et les transforme en fonctions algébriques par l'opérateur nabla. Il est défini comme suit :

$$div\vec{V} = \vec{\nabla}\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

<u>Exemple</u> :

$$\vec{V}(x,y,z) = 2xy\vec{i} + xyz\vec{j} - xyz^2\vec{k}$$

$$div\vec{V} = 2y + xz - 2xyz$$

Rotationnel

Soit un vecteur $\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$. On définit le rotationnel de $\vec{V}$ comme suit :

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \vec{\nabla}\times\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Exemple :

$$\vec{V}(x,y,z) = 2xy\vec{i} + xyz\vec{j} - xyz^2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \vec{\nabla}\times\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & xyz & -xyz^2 \end{vmatrix} = \left(-xz^2 - xy\right)\vec{i} - yz^2\vec{j} + \left(yz - 2x\right)\vec{k}$$

Laplacien

Le Laplacien est défini comme étant le divergent du gradient ou le gradient du divergent.

Le Laplacien d'une fonction algébrique est donné par la relation suivante :

$$\vec{\nabla}\vec{\nabla}(f) = \vec{\nabla}^2(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Le Laplacien d'une fonction vectorielle est donné par la relation suivante :

$$\vec{\nabla}\vec{\nabla}(f) = \vec{\nabla}^2(\vec{V}) = \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial z^2}$$

Indication

Quels que soient la fonction f et le vecteur $\vec{F}$, deux propriétés sont toujours vérifiées :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\, f) = 0 \qquad div(\overrightarrow{rot}\vec{F}) = 0$$

Exemple 0.5 :

Soit trois vecteurs $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ tel que $\|\vec{A}\|=3$, $\|\vec{B}\|=\|\vec{C}\|=2$, $\varphi_1=(\vec{A},\vec{B})=\frac{\pi}{3}$ et $\varphi_2=(\vec{A},\vec{C})=\frac{\pi}{4}$. (Figure 0.7)

1- Déterminer les composantes des vecteurs $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$.
2- Déterminer $\vec{A}+\vec{B}$, $\vec{A}-\vec{B}$, $\vec{B}+\vec{C}$, en donnant les composantes, le module et la représentation graphique.
3- Déterminer de deux façons $\vec{A}\cdot\vec{B}$
4- Déterminer $\vec{A}\wedge\vec{B}$, $\vec{A}\wedge\vec{C}$, $\vec{C}\wedge\vec{B}$, $\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C})$, $\vec{B}\wedge(\vec{A}\wedge\vec{C})$.
5- Déterminer l'aire formée par $\vec{A}$ et $\vec{B}$

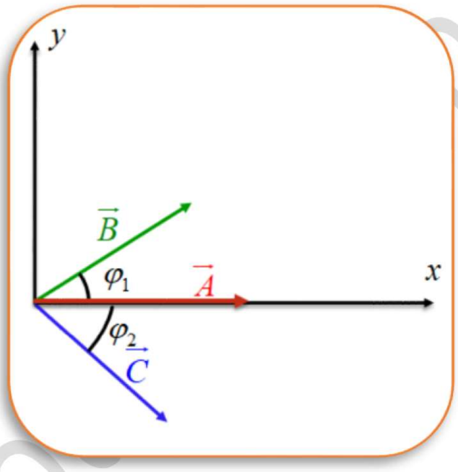

Figure 0.7

Exemple 0.6 : On donne les points A (1,0,0), B (0,2,0), C (0,0,-1).

1- Représenter les points A, B et C.
2- Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$, en déduire son module.
3- Déterminer les composantes du vecteur unitaire porté par le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
4- Déterminer l'angle formé entre les vecteurs $(\overrightarrow{AB})$ et $(\overrightarrow{BA})$