Corrigé_Examen_Maths2

Exercice 1 :[**08 pts**] $[I]$ ***En utilisant la règle de l'Hôpital, calculer*** $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{0}{0} \quad FI \qquad \boxed{[0.25\ pt]}$$

Les fonctions $x \mapsto x\cos x - \sin x$ *et* $x \mapsto x^2$ *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ (*fonctions élémentaires définies sur* $\mathbb{R}$)

et $x \mapsto x^2$ *n'est pas nulle au voisinage de 0.* $\boxed{[0.25\ pt]}$

De plus $\lim_{x\to 0} \frac{(x\cos x - \sin x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{2x} = \lim_{x\to 0} -\frac{x\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} -\frac{\sin x}{2} = 0$ $\boxed{[0.25\ pt]}$

par la règle de lhôpital, on a $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(x\cos x - \sin x)'}{(x^2)'} = 0.$ $\boxed{[0.25\ pt]}$

$[II]$ ***Soit la fonction*** f ***définie par:***

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{x} & si \quad x < 0 \\ e^{bx} - x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$ *où* a *et* b *sont des paramètres réels.*

1) ***Déterminer*** a ***et*** b ***pour que*** f ***soit continue et dérivable en*** 0.

Continuité en 0.

On a $f(0) = e^0 - 0 = 1$ $\boxed{[0.25\ pt]}$ *et* f *continue en* 0 *si* $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$ $\boxed{[0.25\ pt]}$

On a deux cas :

$\boxed{1^{er}\ cas}$ $a = 0,$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ e^{bx} - x & si \quad x \geq 0 \end{cases} \qquad \boxed{[0.25\ pt]}$$

On a $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} 0 = 0 \neq 1 = f(0)$, *donc* f *n'est pas continue en* 0. $\boxed{[0.5\ pt]}$

$\boxed{2^{ème}\ cas}$ $a \neq 0,$

On a

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = \lim_{x\to 0} a\frac{\sin(ax)}{ax} = a \qquad \boxed{[0.5\ pt]}$$

et

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{bx} - x = e^0 - 0 = 1, \forall b \in \mathbb{R} \qquad \boxed{[0.5\ pt]}$$

f est continue en 0 *si* $\boxed{a = 1}$ $\boxed{[0.25\ pt]}$

Dérivabilité en 0.

Pour $a \neq 1, f$ *n'est pas dérivable, puisqu'elle n'est pas continue.*

si $a = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & si \quad x < 0 \\ e^{bx} - x & si \quad x \geq 0 \end{cases} \qquad \boxed{[0.25\ pt]}$$

Comme les fonctions définies par $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ *et* $x \mapsto e^{bx} - x$ *sont dérivables pour* $x \neq 0$, $\boxed{[0.25\ pt]}$

leur dérivées respectives sont : $\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)' = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ *si* $x<0$ *et* $\left(e^{bx}-x\right)' = be^{bx}-1$ *si* $x>0$. $\boxed{[0.5\ pt]}$

Comme $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2} = 0 = f'(0^-)$, $f'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0}\left(be^{bx}-1\right) = b-1$ $\boxed{[0.25\ pt]}$

D'où f *dérivable pour si* $f'(0^-) = f'(0^+)$. *C'est à dire* $b-1=0$, *alors* f *dérivable pour* $\boxed{b=1}$ $\boxed{[0.5\ pt]}$

2) ***Pour** a **et** b **trouvés dans** (1), **l'équation** $f'(x)=0$ **admet-elle une solution sur*** $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.
on a:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2} & si \quad x<0 \\ \frac{1}{2}e^{\frac{x}{4}}-1 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

On remarque $f'(0) = e^0-1=0$, *et* $0\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, *donc* $f'(x)=0$ *admet une solution sur* $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$. $\boxed{[1\ pt]}$

$[III]$ ***La fonction définie par*** $g(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ ***est-elle prolongeable par continuité en 0 et en 1***.

$D =]0,1[\cup]1,+\infty[$. $\boxed{[0.25\ pt]}$
De plus

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln x} = \frac{0}{-\infty} = 0 \qquad \boxed{[0.5\ pt]}$$

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x}{\ln x} = \frac{1}{0} = \infty \qquad \boxed{[0.5\ pt]}$$

Comme $0\notin D_g$ *et* $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ *existe et finie, alors* g *est prolongeable en* 0, $\boxed{[0.25\ pt]}$

et comme $1\notin D_g$ *et* $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ *infinie alors* g *non prolongeable en* 1. $\boxed{[0.25\ pt]}$

Exercice 2 : **[05 pts]** ***Calculer les intégrales suivantes:***

1) $I_1 = \displaystyle\int \frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}\,dx \underset{\boxed{[0.5\ pt]}}{=} \frac{1}{2}\int\frac{2\cos 2x}{1+\sin 2x} \underset{\boxed{[0.5\ pt]}}{=} \frac{1}{2}\int\frac{(1+\sin 2x)'}{1+\sin 2x} \underset{\boxed{[0.5\ pt]}}{=} \frac{1}{2}\ln|1+\sin 2x| + c\ ,\ c\in\mathbb{R}$

2) $I_2 = \displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$. *On pose* $t=\ln x \Longrightarrow dt = \dfrac{dx}{x}$, $\boxed{[0.5\ pt]}$

on obtient $I_2 = \displaystyle\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \underset{\boxed{[0.5\ pt]}}{=} \arcsin t + c \underset{\boxed{[0.5\ pt]}}{=} \arcsin\ln x + c \quad c\in\mathbb{R}$

3) $I_3 = \displaystyle\int arctgx\ dx$. *On pose* $\begin{cases} u = arctgx \Rightarrow du = \dfrac{dx}{1+x^2} & \boxed{[0.5\ pt]} \\ dv = dx \Longrightarrow v = x & \boxed{[0.5\ pt]} \end{cases}$,
on obtient

$$I_3 = xarctgx - \int\frac{x\ dx}{1+x^2} \underset{\boxed{[0.5\ pt]}}{=} xarctgx - \frac{1}{2}\int\frac{2x\ dx}{1+x^2} \underset{\boxed{[0.5\ pt]}}{=} xarctgx - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c, \quad c\in\mathbb{R}$$

Exercice 3 *:* [**07 pts**] ***On considère les matrices suivantes:***

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \; et \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) ***Calculer les produits*** AB ***et*** BA.

$$\begin{array}{cc} & {}^{xB}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ A\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}_{=AB} \end{array} \quad \boxed{0.5\ pt} \quad et \quad \begin{array}{cc} & {}^{xA}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ B\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}_{=BA} \end{array} \quad \boxed{0.5\ pt}$$

2) ***En déduire*** A^{-1}, ***la matrice inverse de*** $\mathbf{A}$.

$AB = BA = -2I_2$ $\boxed{0.5\ pt}$ $\Longrightarrow A\left(-\frac{1}{2}B\right) = \left(-\frac{1}{2}B\right)A = I_2$ $\boxed{0.5\ pt}$

D'où A *est inversible et* $A^{-1} = \left(-\frac{1}{2}B\right)$. $\boxed{0.5\ pt}$

3) ***Montrer que la matrice*** C ***est inversible.***

$$detC = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 \\ \mathbf{0} & 2 & 1 \\ \mathbf{2} & 1 & 0 \end{vmatrix} = +1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{\boxed{0.75\ pt}}{=} -9 \quad \underbrace{\det C \neq 0,\ C \ est\ donc\ inversible.}_{\boxed{0.25\ pt}}$$

4) ***Déterminer*** C^{-1} ***par la méthode de la comatrice.***

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C}\left({}^{t}comC\right) \quad \boxed{0.5\ pt}$$

$$comC = \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta_{11} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \Delta_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \Delta_{13} = +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \Delta_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \Delta_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \Delta_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \Delta_{31} = +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \Delta_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \Delta_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}}_{\boxed{(\boxed{0.25} \times 9)}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \boxed{0.5\ pt}$$

On a

$$\left({}^{t}comC\right) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \boxed{0.25\ pt}$$

D'où

$$C^{-1} = \frac{1}{-9}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{-2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-2}{9} \end{pmatrix} \quad \boxed{0.5\ pt}$$