I) Rappels de certains types d'intégration

$$\int f'(t).f(t)dt = \frac{1}{n+1}f^{n+1}(t)+c \quad , \quad n\neq -1 \quad , c\in\mathbb{R}$$

$$\int \frac{f'(t)}{f^n(t)}dt = \frac{1}{(1-n)\,f^{n-1}(t)}+c \quad , \quad n\neq 1$$

$$\int \frac{f'(t)}{f(t)}dt = \ln|f(t)|+c$$

$$\int \frac{f'(t)}{\sqrt{1-(f(t))^2}}dt = \arcsin f(t)+c = -\arccos f(t)+c$$

$$\int \frac{f'(t)}{1+(f(t))^2}dt = \arctan f(t)+c$$

Fonctions rationnelles:

Type I : $\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a|+c.$

Type II : $\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{-1}{(n-1)\,(x-a)^{n-1}}+c.$

Type III : $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+c$

Type IV : $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, n>1$

. Pour calculer J_n, utiliser cette formule de récurrence

$$2na^2 I_{n+1} = (2n-1)\,I_n + \frac{x}{(x^2+a^2)^n} \text{ avec } I_1 = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+c.$$

Type V : $J_1 = \int \frac{Mx+N}{x^2+2\alpha x+\beta}dx \ (\alpha^2-\beta<0)$. Remarqouns que $x^2+2\alpha x+\beta = (x+\alpha)^2+\beta-\alpha^2$
Posons par la suite $t=x+\alpha$ et $\beta-\alpha^2=h^2>0$. On obtient

$$J_1 = \int \frac{Mt+N-\alpha M}{t^2+h^2}dt = \frac{1}{2}M\int\frac{2t}{t^2+h^2}dt + (N-\alpha M)\int\frac{dt}{t^2+h^2}$$

$$= \frac{1}{2}M\ln\left(t^2+h^2\right) + \frac{1}{h}(N-\alpha M)\operatorname{arctg}\frac{t}{h}+c = \frac{1}{2}M\ln\left(x^2+2\alpha x+\beta\right)+\frac{1}{h}(N-\alpha M)\operatorname{arctg}\frac{1}{h}(x+\alpha)+c.$$

Type VI : $J_n = \int \frac{Mx+N}{(x^2+2\alpha x+\beta)^n}dx \ (\alpha^2-\beta<0)$; $n>1$. Posons $t=x+\alpha$ et $\beta-\alpha^2=h^2>0$, on obtient

$$J_n = \int\frac{Mt+N-\alpha M}{(t^2+h^2)^n}dt = \frac{1}{2}M\int\frac{2t}{(t^2+h^2)^n}dt + (N-\alpha M)\int\frac{dt}{(t^2+h^2)^n} = \frac{1}{2}M\frac{-1}{(n-1)\,(t^2+h^2)^{n-1}} + (N-\alpha M)\underbrace{\int\frac{dt}{(t^2+h^2)^n}}_{Type\ IV}.$$

Fonctions trigonométriques:

Type VII : **Intégrale de la forme** $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$, où R est une fonction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$.
En général, on pose $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ $(x = 2 \operatorname{arctg} t)$, donc

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2},\ \ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \text{ et } \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Cas particuliers:

1) $K_1 = \int R(\sin x) \cos x dx$, poser $t = \sin x$ alors $dt = \cos x dx$.
2) $K_2 = \int R(\cos x) \sin x dx$, poser $t = \cos x$ alors $dt = -\sin x dx$.
3) $K_3 = \int R\left(\sin^2 x, \cos^2 x\right) dx$ ou $K_3 = \int R(\operatorname{tg} x)\, dx$, poser $t = \operatorname{tg} x$ $(x = \operatorname{arctg} t)$ alors

$$dx = \frac{dt}{1+t^2},\ \ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \text{ et } \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}.$$

4) $K_4 = \int \sin^m x\ \cos^n x\ dx$ $(n, m \in \mathbb{Z})$

a) n et m sont pairs, on pose alors $t = \operatorname{tg} x$,

b) n et m sont impairs, on pose alors $t = \cos 2x$,

c) n et m sont de parité différente, on pose alors $\begin{cases} t = \cos x & \text{si } n \text{ pair} \\ t = \sin x & \text{si } m \text{ pair} \end{cases}$

Série d'exercices n°3 - Intégration.

Exercice 1 *Calculer les intégrales indéfinies suivantes:*
1) à l'aide du calcul direct

$$1)\quad \int \frac{\sqrt{x} - x^4 e^{x^2} + x^2}{x^3}dx \qquad 2)\quad \int \cos^2 x dx \qquad 3)\quad I_2 = \int \frac{2^x + 5^x}{10^x}dx \qquad 4)\quad \int \frac{\sqrt{x^2-3} - \sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x4-9}}$$

2)à l'aide de changement de variable

$$1)\quad \int \frac{x}{\sqrt{x}\,(x+1)}dx \qquad 2)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x} \qquad 3)\quad \int \frac{e^{3x}}{e^{6x}+25}dx$$

3) à l'aide de l'intégration par parties

$$1)\quad \int arctg\sqrt{x}dx \qquad 2)\quad \int \ln(1+x^2)dx \qquad 3)\quad \int \ln x dx \qquad 4)\quad \int x^2\cos^2 x dx$$

4)Fractions rationnelles

$$1)\quad \int \frac{x}{(x+1)(2x+1)}dx \qquad 2)\quad \int \frac{x}{(x^3-1)}dx \qquad 3)\quad \int \frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)}dx \qquad 4)\quad \int \frac{x}{(x^2+2x-3)}dx$$

4) Fonctions trigonométriques

$$1)\quad \int \frac{dx}{1+\sin^2 x} \qquad 2)\quad \int \frac{dx}{1+\cos x} \qquad 3)\quad \int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx \qquad 4)\quad \int \sin^3 x \cos^4 x dx$$

Exercice 2 *Calculer les intégrales définies suivantes:*

$$1)\quad \int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx \qquad 2)\quad \int_1^e \frac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)}dx \qquad 3)\quad \int_0^1 x\ln x dx \qquad 4)\quad \int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$$

II) Corrigé de la série d'exercices n°3 - Intégration

Exercice 3 *Calculer les intégrales indéfinies indsuivantes:*
I) à l'aide d'un calcul direct

1) $$I_1 = \int \frac{\sqrt{x} - x^4 e^{x^2} + x^2}{x^3} dx = \int \frac{\sqrt{x}}{x^3} dx - \int \frac{x^4 e^{x^2}}{x^3} dx + \int \frac{x^2}{x^3} dx$$
$$= \int x^{-\frac{5}{2}} dx - \int x e^{x^2} dx + \int \frac{1}{x} dx$$
$$= \frac{-2}{3} x^{\frac{-3}{2}} - \frac{1}{2} e^{x^2} + \ln|x| + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

2) $$I_2 = \int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx \qquad \left(car \ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \right)$$
$$= \int \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx \qquad \left(ind\text{:} \ \int (\cos \alpha x)\, dx = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha x + c \right)$$
$$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

II) à l'aide d'un changement de variables
1) $J_1 = \int \frac{x}{\sqrt{x}\,(x+1)} dx \ (t = \sqrt{x})$
En utilisant le changement de variable $t = \sqrt{x}$, alors $x = t^2$ et donc $dx = 2tdt$

$$J_1 = \int \frac{x}{\sqrt{x}\,(x+1)} dx = \int \frac{t^2 2t}{t\,(t^2+1)} dt$$
$$= 2\int \frac{t^2 dt}{t^2+1} = 2\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt = 2\int 1 dt - 2\int \frac{1}{t^2+1} dt$$
$$= 2t - 2 \operatorname{arctg} t + c \quad , \quad c \in \mathbb{R} \qquad = 2\sqrt{x} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

1) $J_3 = \int \frac{e^{3x}}{e^{6x}+25} dx$
En utilisant le changement de variable $t = e^{3x}$, alors $dt = 3e^{3x} dx$ et donc

$$J_3 = \frac{1}{3} \int \frac{3e^{3x}}{e^{6x}+25} dx = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2+25} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{25\left(\left(\frac{t}{5}\right)^2 + 1\right)} = \frac{1}{75} \underbrace{\int \frac{dt}{\left(\frac{t}{5}\right)^2 + 1}}_{J}$$

Pour calculer J, on pose $z = \frac{t}{5}$, alors $dt = 5dz$ et donc

$$J = \int \frac{5dz}{z^2+1} = 5 \operatorname{arctg} z + c = 5 \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{5} \right) + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$J_3 = \frac{1}{15} \operatorname{arctg} \left(\frac{e^{3x}}{5} \right) + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}.$$

III) à l'aide de l'intégration par parties
1) $K_1 = \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \ dx$

Posons $\begin{cases} u(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$, *donc* $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\,(x+1)} \\ v(x) = x \end{cases}$ $\left(ind\text{:} \ (\operatorname{arctg} f)' = \dfrac{f'}{1+f^2} \right)$

En appliquant la formule d'intégration par partie $\left(\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(cx)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx\right)$, *on obtient*

$$K_1 = \int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\ dx \quad = x \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\int \frac{x}{\sqrt{x}\,(x+1)}dx$$

$$= x \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{1}{2}J_1$$

$$= x \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\left(2\sqrt{x} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right) + c \quad , \quad c \in \mathbb{R} \quad = (x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}.$$

3) $K_3 = \int x^2 \cos^2 x\ dx$.

On pose $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = \cos^2 x \end{cases}$, *donc* $\begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x \end{cases}$ $\left(\textit{ind: } \int \cos^2 x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c \ , \ c \in \mathbb{R} \textit{ (voir la } 1^{\textit{ére}} \textit{ partie)}\right)$

Alors

$$K_3 = \int x^2 \cos^2 x\ dx \quad = x^2\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right) - \int (2x)\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right)dx \quad = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 \sin 2x - \int\left(x^2 + \frac{1}{2}x\sin 2x\right)\ dx$$

$$= \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2\sin 2x - \underbrace{\int x^2\ dx}_{=\frac{1}{3}x^3} - \frac{1}{2}\int x\sin 2x\ dx \qquad = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2\sin 2x - \frac{1}{2}\int x\sin 2x\ dx$$

En faisant une seconde intégration par patie pour calculer $\int x\sin 2x\ dx$

On pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \sin 2x \end{cases}$, *donc* $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$. *Alors*

$$\int x\sin 2x\ dx \quad = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x\ dx \quad = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}.$$

D'où:

$$K_3 = \int x^2\cos^2 x\ dx = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x\cos 2x + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}\right)\sin 2x + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}.$$

IV) Fractions rationnelles

1) $L_1 = \int \frac{x}{(x+1)(2x+1)}dx$. *Par la décomposotion en éléments simples, on obtient*

$$\frac{x}{(x+1)(2x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1}$$

Donc

$$L_1 = \int \frac{x}{(x+1)(2x+1)}dx \quad = \int \frac{1}{x+1}dx - \int \frac{1}{2x+1}dx \quad = \int \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x+1}dx$$

D'où

$$L_1 = \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|2x+1| + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}.$$

3) $L_3 = \int \frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)}dx$. *On a*

$$\frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)} = \frac{1}{4}\frac{x+1}{x^2+1} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{7}{2(x-1)^3}$$

Alors

$$L_3 = \int \frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)}dx \quad = \frac{1}{4}\int \frac{x+1}{x^2+1}dx - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x-1)} + \frac{7}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2+1}dx - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x-1)} + \frac{7}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{1}{8}\ln\left(x^2+1\right) + \frac{1}{4}\arctan x - \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{7}{4}\frac{1}{(x-1)^2} + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}.$$

V) Fonctions trigonométriques

1) $M_1 = \int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int R\left(\cos^2 x; \sin^2 x\right) dx$. *On pose* $t = \operatorname{tg} x$, *donc* $dt = \frac{dt}{1+t^2}$ *et* $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$. *Alors*

$$M_1 = \int \frac{dx}{1+\sin^2 x} \quad = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{t^2}{1+t^2}} \quad = \int \frac{dt}{2t^2+1} \quad = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \quad = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}t\right)+c \quad = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\right)+c \quad , \quad c \in \mathbb{R}.$$

2) $M_2 = \int \frac{dx}{1+\cos x} = \int R(\cos x; \sin x)\, dx$. *Posons* $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$, *donc* $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ *et* $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. *Alors*

$$M_2 = \int \frac{dx}{1+\cos x} \quad = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \quad = \int dt \quad = t+c \quad = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+c+c \quad , \quad c \in \mathbb{R}.$$

3) $M_3 = \int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx = \int R(\cos x)\sin x dx$. *Il suffit de poser* $\cos x = t$, *alors* $dt = -\sin x dx$

$$M_3 = \int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx \quad = -\int \frac{dt}{1+t} \quad = -\ln|1+t|+c \quad = \ln\left(\frac{1}{1+\cos x}\right)+c \quad , \quad c \in \mathbb{R}.$$

4) $M_4 = \int \sin^3 x \cos^4 x dx$. *Il suffit de poser* $t = \cos x$, *alors* $dt = -\sin x dx$

$$M_4 = \int \sin^3 x \cos^4 x dx \quad = -\int \left(\sin^2 x\right)\left(\cos^4 x\right)\underbrace{(-\sin x)\, dx}_{=dt} \quad = -\int \left(1-t^2\right) t^4 dt = \int \left(t^6-t^4\right) dt$$

$$= \frac{1}{7}t^7 - \frac{1}{5}t^5 + c \qquad = \frac{1}{7}(\cos x)^7 - \frac{1}{5}(\cos x)^5 + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4 *: Calculer les intégrales définies suivantes:*

1) $N_1 = \int_1^e \frac{1+\ln x}{x}\, dx$, *on remarque que* $\frac{1+\ln x}{x} = (1+\ln x)'(1+\ln x)$, *d'où*

$$\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}\, dx = \frac{1}{2}(1+\ln x)^2\Big|_1^e = 2-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

3) $N_3 = \int_1^e \frac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)}\, dx$, *on pose* $t = \ln x$, *alors* $dt = \frac{dx}{x}$ *et lorsque* $x \to 1$ $(resp.\ x \to e)$, $t \to 0$ $(resp.\ t \to 1)$ *d'où*

$$\int_1^e \frac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)}\, dx = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t\ \Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

5) $N_5 = \int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\, dx$, *posons* $t = \ln x$ *et donc* $dt = \frac{dx}{x}$, *lorsque* $x \to 1$ $(resp.\ x \to e)$, $t \to 0$ $(resp.\ t \to 1)$. *Alors*

$$\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\, dx = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t\ \Big|_0^1 = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

7) $N_7 = \int_0^1 x \ln x dx$, *en faisant l'intégration par patie, on pose* $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \ln x \end{cases}$, *donc* $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = x\ln x - x = x(\ln x - 1) \end{cases}$.

Alors

$$N_7 = \int_0^1 x \operatorname{arctg} x\ dx = x^2 \ln x - x^2\Big|_0^1 - \int_0^1 (x\ln x - x)\, dx = -1 - \int_0^1 x \ln x\ dx + \int_0^1 x\ dx = -1 - N_7 + \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = -\frac{1}{2} - N_7.$$

D'où

$$N_7 = \frac{-1}{4}.$$